Übungen zur Vorlesung “Algebra und Zahlentheorie”
WS16/17 Blatt 1

Ausgabe: 23.10.2017, **Abgabe:** 30.10.2017

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws17/azt/

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.
Bei Fragen zur Vorlesung wenden Sie sich frühzeitig an Ihren Tutor oder Ihre Tutorin.

Aufgabe 1.1: Bestimmen Sie die Lösungen des Polynoms

$$X^4 - 4X^2 - 8X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$$

mit den Cardano’schen Formeln. Geben Sie den Rechenweg und eine Quelle die Sie benutzt haben an.
Prüfen Sie beispielhaft an einem Ihrer Ergebnisse, dass es sich tatsächlich um eine Nullstelle handelt. (Hinweis: Sie werden dabei auf ein Polynom von Grad 3 stoßen. Dieses müssen Sie nicht mit den Cardano’schen Formeln lösen, sondern dürfen Nullstellen raten.)

(4 Punkte)

Aufgabe 1.2: Zeigen Sie:

1. Das neutrale Element in einer Gruppe ist eindeutig.
2. Das inverse Element zu einem Element g in einer Gruppe ist eindeutig.

(2 Punkte)

Aufgabe 1.3: Welche der folgenden Mengen sind Gruppen. Welche Axiome sind erfüllt bzw. verletzt?

1. $\mathbb{N}$ mit Addition;
2. $\mathbb{N}$ mit Multiplikation;
3. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ mit Multiplikation;
4. $\mathbb{N}$ mit der Verknüpfung $a \circ b = \max(a, b)$.

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 1.4: Sei $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0\}$. Zeigen Sie:

1. Für jedes $g \in G$ ist die Abbildung $int_g : G \to G$ mit $x \mapsto gxg^{-1}$ ein Gruppenhomomorphismus.

2. Die induzierte Abbildung $G \to \mathrm{Aut}(G)$ mit $g \mapsto int_g$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Dabei ist $\mathrm{Aut}(G)$ die Gruppe der Gruppenisomorphismen $G \to G$.

3. Berechnen Sie den Kern von $G \to \mathrm{Aut}(G)$.

4. Bonusaufgabe: Ist $G \to \mathrm{Aut}(G)$ surjektiv?

(6 + X Punkte)