Übungen zur Vorlesung "Algebra und Zahlentheorie"
WS16/17 Blatt 10

Ausgabe: 08.01.2018, **Abgabe:** 15.01.2018

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws17/azt/

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.
Bei Fragen zur Vorlesung wenden Sie sich frühzeitig an Ihren Tutor oder Ihre Tutorin.

Aufgabe 10.1: Beweisen Sie die folgenden Gesetze für die natürlichen Zahlen unter Verwendung der Peano-Axiome:

1. Kommutativgesetz für die Addition.
2. Kürzungsregel der Addition: Ist $a + b = a + c$, so ist $b = c$

(6 Punkte)

Aufgabe 10.2: Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) G ist zyklisch

(b) Für jedes n gibt es höchstens n verschiedene Elemente, deren Ordnung n teilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 10.3: Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass jede endliche Untergruppe von $K^* = (K \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ zyklisch ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 10.4: Bestimmen Sie die Menge der Körperautomorphismen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass jeder Körperautomorphismus $\mathbb{Q}$ punktweise fest hält. Dann beweisen Sie, dass ein Körperautomorphismus auf $\mathbb{R}$ die Ordnung $\leq$ erhält.)

(4 Punkte)