# Übungen zur Vorlesung "Algebra und Zahlentheorie" WS16/17 Blatt 13

**Ausgabe:** 29.01.2018, **Abgabe:** 05.02.2018

---

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws17/azt/

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.
**Bei Fragen zur Vorlesung wenden Sie sich frühzeitig an Ihren Tutor oder Ihre Tutorin.**

---

**Aufgabe 13.1:** Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{2})$. Betrachten Sie die beiden Elemente

$$\alpha = 3 + \sqrt{3} \text{ und } \beta = (3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{2})$$

von $K$.

1. Beweisen Sie, dass $K(\sqrt{\alpha})/\mathbb{Q}$ und $K(\sqrt{\beta})/\mathbb{Q}$ galois sind.
2. Berechnen Sie die Galoisgruppen von $K(\sqrt{\alpha})/\mathbb{Q}$ und $K(\sqrt{\beta})/\mathbb{Q}$.
3. Berechnen Sie alle Zwischenkörper von $K(\sqrt{\alpha})/\mathbb{Q}$ und $K(\sqrt{\beta})/\mathbb{Q}$ und geben Sie Erzeuger an.

(12 Punkte)

**Aufgabe 13.2:** Sei $L/K$ galois und $a \in L$. Zeigen Sie, dass

$$P = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} (X - \sigma(a)) \in K[X]$$

eine Potenz des Minimalpolynoms von $a$ über $K$ ist.

(4 Punkte)

**Aufgabe 13.3:** Sei $K$ ein Körper. Zeigen Sie, dass ein vollkommener Abschluss existiert. Das bedeutet eine Körpererweiterung $K^{per}/K$, so dass $K^{per}$ ein vollkommener Körper ist und für alle Zwischenkörper $K^{per} \supset L \supset K$ ist $L$ nicht vollkommen.

(4 Punkte)

(bitte wenden)

**Bonus-Aufgabe 13.4:** Sei $L/K$ eine Galoiserweiterung vom Grad $n$ und $v_1, \dots, v_n$ eine $K$-Basis von $L$. Sei $\mathrm{Gal}(L/K) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. Beweisen Sie, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(v_1) & \cdots & \sigma_n(v_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1(v_n) & \cdots & \sigma_n(v_n) \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

(4 Punkte)