# Übungen zur Vorlesung "Algebra und Zahlentheorie" WS16/17 Blatt 2

**Ausgabe:** 30.10.2017, **Abgabe:** 06.11.2017

---

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws17/azt/

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.
**Bei Fragen zur Vorlesung wenden Sie sich frühzeitig an Ihren Tutor oder Ihre Tutorin.**

---

**Aufgabe 2.1:** Sei $G$ eine Gruppe und $H$ eine Untergruppe von Index 2. Zeigen Sie, dass $H$ ein Normalteiler ist.

(4 Punkte)

**Aufgabe 2.2:** Sei $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$. Beantworten Sie die Fragen mit Beweis.

(a) Ist $G$ abelsch?

(b) Wie viele Elemente hat $G$?

(c) Bestimmen sie die Ordnung der Elemente $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) Betrachten Sie die Untergruppen

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ und } \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Welche davon sind Normalteiler?

(6 Punkte)

**Aufgabe 2.3:** Für eine abelsche Gruppe $G$ definieren wir $\chi(G) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$.

(a) Zeigen Sie, $\chi(G)$ mit der Verknüpfung $(\varphi \cdot \psi)(x) := \varphi(x) \cdot \psi(x)$ ist eine Gruppe.

Sei nun $G$ zyklisch von Ordnung $n$.

(b) Zeigen Sie, dass $\chi(G)$ zyklisch von Ordnung $n$ ist

(c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{ev}_G : G \to \chi(\chi(G))$ mit $g \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(g))$ ein Isomorphismus ist.

(bitte wenden)

(Anmerkung: Falls Sie lieber mit additiver Notation arbeiten möchten, können Sie $\chi(G) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ als Definition benutzen, ohne zeigen zu müssen, dass die beiden Definitionen isomorphe Gruppen liefern.)

(6 Punkte)

**Aufgabe 2.4:** Sei

$$A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b, \text{ für } a \in \mathbb{R}^*, \ b \in \mathbb{R}\}$$

die Gruppe der affinen Abbildungen auf $\mathbb{R}$ mit Hintereinanderausführung von Funktionen.
Sei

$$T = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = x + b, \text{ für } b \in \mathbb{R}\}$$

die Untergruppe der Translationen.
Zeigen Sie, dass $T$ ein Normalteiler von $A$ ist und berechnen Sie $A/T$.

(3 Punkte)