Übungen zur Vorlesung "Algebra und Zahlentheorie" WS16/17 Blatt 3

Ausgabe: 06.11.2017, **Abgabe:** 13.11.2017

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws17/azt/

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.
Bei Fragen zur Vorlesung wenden Sie sich frühzeitig an Ihren Tutor oder Ihre Tutorin.

Aufgabe 3.1: Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass wenn für alle $g \in G$ gilt, dass $g^2 = e$, dann ist G kommutativ.

(4 Punkte)

Aufgabe 3.2: Lösen Sie folgende simultane Kongruenzen und geben Sie ihren Lösungsweg an.

(a) $x \equiv 0 \mod 2$, $2x \equiv 1 \mod 5$, $5x \equiv 3 \mod 7$

(b) $111x \equiv 16 \mod 379$, $113x \equiv 311 \mod 653$

Hinweis Der Chinesische Restsatz garantiert, dass die Kongruenzen lösbar sind. Der Beweis der Vorlesung für

$$\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

für teilerfremde n und m, wurde geführt, indem man eine Abbildung definiert, dann Injektivität zeigt und Surjektivität daraus folgert, dass beide Mengen gleich groß sind. Ein konstruktiver Beweis für Surjektivität ist äquivalent zu einer allgemeinen Lösungsformel für simultane lineare Kongruenzen.

(6 Punkte)

Aufgabe 3.3: Finden Sie Erzeuger und Relationen für $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$. (Siehe auch Aufgabe 2.2)

(3 Punkte)

Aufgabe 3.4: Sei G eine Gruppe und sei $N = \left\langle \left\{ aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G \right\} \right\rangle$. Zeigen Sie:

(a) N ist Normalteiler.

(b) G/N ist kommutativ.

(4 Punkte)