Übungen zur Vorlesung “Algebra und Zahlentheorie”
WS16/17 Blatt 4

Ausgabe: 13.11.2017, **Abgabe:** 20.11.2017

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws17/azt/

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.
Bei Fragen zur Vorlesung wenden Sie sich frühzeitig an Ihren Tutor oder Ihre Tutorin.

Aufgabe 4.1: Berechnen Sie in einer geeigneten S_n als Produkt disjunkter Zykel. Sie müssen dabei keine Rechenwege angeben.

(a) (i) $(12)(23)(34)$
  (ii) $(12)(13)(14)$
  (iii) $(123)(5623)(146)$
  (iv) $(135)(7146)(354612)$

(b) Sei $\sigma = (1 \dots n)$.
  (i) $\sigma(1,2)\sigma^{-1}$
  (ii) $\sigma(i, i+1)\sigma^{-1}$ für $i = 1, \dots n-2$
  (iii) $(23)(12)(23)$
  (iv) $(i, i+1)(1, i)(i, i+1)$ für $i = 2, \dots, n-1$
  (v) $(1, i)(1, j)(1, i)$ für $i \neq j$

(c) Zerlegen Sie folgende Permutation in disjunkte Zykel.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 4 & 7 & 8 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 4.2: Zeigen Sie, dass A_4 nicht einfach ist. Betrachten Sie dafür $\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subset A_4$ und zeigen Sie, dass dies ein Normalteiler ist.

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 4.3: Sei $S_n = S(\{1, 2, \ldots, n\})$ die symmetrische Gruppe.

(a) Sei $\sigma \in S_n$ und sei $(n_1 \ldots n_r)$ ein Zykel in S_n. Zeigen Sie

$$\sigma(n_1 \ldots n_r)\sigma^{-1} = (\sigma(n_1) \ldots \sigma(n_r))$$

(b) Zeigen Sie die selbe Aussage für Produkte von Zykeln. Formal:

$$\sigma(n_{11} \ldots n_{1r_1}) \ldots (n_{k1} \ldots n_{kr_k})\sigma^{-1} = (\sigma(n_{11}) \ldots \sigma(n_{1r_1})) \ldots (\sigma(n_{k1}) \ldots \sigma(n_{kr_k}))$$

(3 Punkte)

Aufgabe 4.4: Sei $M = \mathbb{Z}^2$ und $N = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} M$, d.h. die Untergruppe die von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugt wird. Berechnen Sie M/N und geben Sie ihr Ergebnis in der Form des Elementarteilersatzes an.

(4 Punkte)