Übungen zur Vorlesung “Algebra und Zahlentheorie” WS16/17 Blatt 5

Ausgabe: 20.11.2017, **Abgabe:** 27.11.2017

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws17/azt/

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.
Bei Fragen zur Vorlesung wenden Sie sich frühzeitig an Ihren Tutor oder Ihre Tutorin.

Aufgabe 5.1: Sei $G = S_n$ und betrachten Sie $X = S_n$. G operiert auf X durch Konjugation, d.h.

$$g.x = gxg^{-1}$$

1. Bestimmen Sie die Bahnen.
2. Machen Sie ihr Ergebnis für S_5 konkret.

(4 Punkte)

Aufgabe 5.2: Sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Dies ist ein Körper. Wir betrachten $V = \mathbb{F}_p^n$ und $G_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. Die Gruppe G operiert auf V.

(a) Bestimmen Sie die Bahnen und aus jeder Bahn eine Standgruppe.

(b) Leiten sie aus der Bahn eine rekursive Formel für $|G_n|$ her.

(5 Punkte)

Aufgabe 5.3: $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ operiert auf $\mathbb{F}_2^2 \setminus \{0\}$.

1. Zeigen Sie, dass diese Operation transitiv ist.
2. Zeigen Sie, dass diese Operation treu ist.
3. Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$ gilt.

(3 Punkte)

Aufgabe 5.4: Sei G eine endliche Gruppe die auf einer Menge X operiert. Sei $X^g = \{x \in X \mid g.x = x\}$. Sei X/G die Menge der Bahnen. Zeigen Sie

$$|G|\,|X/G| = \sum_{g \in G} |X^g|$$

(Hinweis: $\sum_{g\in G} |X^g|$ zählt die Elemente in einer Teilmenge von $G \times X$.)

(4 Punkte)