Übungen zur Vorlesung "Algebra und Zahlentheorie" WS16/17 Blatt 6

Ausgabe: 27.11.2017, **Abgabe:** 04.12.2017

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws17/azt/

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.
Bei Fragen zur Vorlesung wenden Sie sich frühzeitig an Ihren Tutor oder Ihre Tutorin.

Aufgabe 6.1: Seien R, S Ringe und $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus.

1. Sei $J \subset S$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(J) \subset R$ ein Ideal ist.
2. Sei $I \subset R$. Zeigen Sie, dass $f(I)$ im allgemeinen kein Ideal ist.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 6.2: Finden und beweisen Sie ein hinreichendes und notwendiges Kriterium an Ringhomomorphisphmen $f : R \to S$, so dass $f(I)$ ein Ideal von S ist für alle Ideale $I \subset R$.

(2 Punkte)

Aufgabe 6.3: Sie $R = \mathbb{R}[X]$.

1. Ist die Menge $\{f \in R \mid \deg f = 0 \mod 2\}$ ein Ideal?
2. Sei $I = (X^2+1) \subset R$. Schreiben Sie das multiplikative Inverse von $7X+2+I$ in der Form $aX + b + I$ in R/I mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(2 Punkte)

Aufgabe 6.4: Betrachten Sie $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.

1. Bestimmen Sie die p-Sylows von G.
2. Wählen Sie ein p-Sylow H von G. Finden Sie eine Kette
$$H_0 = \{0\} \subset H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_r = H$$
so dass $H_i \lhd H$ und $H_i/H_{i-1} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für alle $1 \leq i \leq r$.

(4 Punkte)

Aufgabe 6.5: Bestimmen Sie Anzahl und Isomorphietyp der p-Sylows von D_{18}, der Symmetriegruppe des regelmäßigen 18-Ecks.
(Anmerkung: $|D_{18}| = 36$)

(6 Punkte)