Übungen zur Vorlesung “Algebra und Zahlentheorie” WS16/17 Blatt 7

Ausgabe: 04.12.2017, **Abgabe:** 11.12.2017

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws17/azt/

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.
Bei Fragen zur Vorlesung wenden Sie sich frühzeitig an Ihren Tutor oder Ihre Tutorin.

Aufgabe 7.1: Sie $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei. $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \Big\{a + b\sqrt{d} \ \mid \ a, b \in \mathbb{Z}\Big\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ein Ring ist.

(b) Sie $N : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \to \mathbb{Z}$ mit $N(a + b\sqrt{d}) = a^2 - db^2$. Zeigen Sie, dass N eine multiplikative Funktion ist.

(c) Zeigen Sie, $N(a+b\sqrt{d})$ ist Einheit in $\mathbb{Z}$, genau dann wen $a+b\sqrt{d}$ eine Einheit in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ist

(4 Punkte)

Aufgabe 7.2: Zeigen Sie, dass in $\mathbb{Z}[i]$ der Satz von der Division mit Rest bezüglich der Funktion N aus Aufgabe 7.1 gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.3: Zeigen Sie, dass in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ keine eindeutige Zerlegung in irreduzible Elemente existiert.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.4: Entscheiden Sie mit Beweis ob die folgenden Polynome in $\mathbb{R}[X]$ irreduzibel sind

(a) $X^2 + 1$

(b) $X^3 + X + 1$

(c) $X^2 + X + 1$

(d) $X^4 + X^2 + 1$

(2 Punkte)

Aufgabe 7.5: Finden Sie ein Element, das folgendes Ideal als Hauptideal erzeugt.

$$(X^7 + X^4 + 2X^3 + 2X + 1,\ 2X^5 + 2X^2 + X + 1) \subset \mathbb{F}_3[X]$$

(4 Punkte)