Übungen zur Vorlesung "Algebra und Zahlentheorie" WS16/17 Blatt 8

Ausgabe: 11.12.2017, **Abgabe:** 18.12.2017

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws17/azt/

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.
Bei Fragen zur Vorlesung wenden Sie sich frühzeitig an Ihren Tutor oder Ihre Tutorin.

Aufgabe 8.1: Zeigen Sie: Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom. Wenn es eine Primzahl p und eine ganze Zahl m mit $1 \leq m \leq n$ gibt, so dass

$$p | a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, \quad p \nmid a_m \text{ und } p^2 \nmid a_0$$

dann hat P einen irreduziblen Faktor von Grad $d \geq m$.

(4 Punkte)

Aufgabe 8.2: Entscheiden Sie Irreduzibilität folgender Polynome

1. $x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$
2. $3x^4 + 9x^3 + 18x^2 + 9x + 9 \in \mathbb{Q}[x]$
3. $x^n + 5x^{n-1} + 3 \in \mathbb{Q}[x]$
4. $x^2 - 3 \in \mathbb{F}_5[x]$
5. $3x^3 + 2x^2 + x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$

(5 Punkte)

Aufgabe 8.3: Sei L/K eine Körpererweiterung vom Grad $[L : K] = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Sei $f \in K[X]$ ein Polynom von Grad $\deg f = 3$, welches in L eine Nullstelle hat. Zeigen Sie, dass f bereits in K eine Nullstelle hat.

(4 Punkte)

Aufgabe 8.4: Seien $P = X^n - 2$ und $Q = X^m - 3$ Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ mit $\mathrm{ggt}(n, m) = 1$. Seien weiter $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ Nullstellen von P beziehungsweise Q.

1. Bestimmen Sie den Grad von $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$.
2. Bestimmen Sie ein Polynom in $\mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ mit Nullstelle $\alpha + \beta$ für $n = 2$ und $m = 3$.
3. (Bonus) Bestimmen Bestimmen Sie ein Polynom in $\mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ mit Nullstelle $\alpha + \beta$ für $n = 5$ und $m = 4$.

(4+? Punkte)