Übungen zur Vorlesung “Algebra und Zahlentheorie”

WS16/17 Blatt

Ausgabe: , Abgabe:

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws17/azt/

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.
Bei Fragen zur Vorlesung wenden Sie sich frühzeitig an Ihren Tutor oder Ihre Tutorin.

Aufgabe .1: Beantworten Sie die folgenden Fragen mit Ja oder Nein und geben Sie eine kurze Begründung:

1. Sei G eine endliche Gruppe von Ordnung n. Dann teilt die Ordnung jedes Elements n.
2. Sei G eine endliche Gruppe von Ordnung n. Dann gibt es für jeden echten Teiler von n ein Element $g \in G$ mit ord $g = n$.
3. Sei G eine abelsche Gruppe. Dann ist jede Untergruppe ein Normalteiler.
4. Sei G eine Gruppe. Dann ist nicht jeder Normalteiler eine Untergruppe.
5. Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler. Dann ist jeder Normalteiler von N auch ein Normalteiler von G.
6. Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler. Dann ist jede Untergruppe von N ein Normalteiler von G.
7. Sei G eine Gruppe und p prim. Dann ist jede Untergruppe von Index p ein Normalteiler.
8. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Dann ist jeder Normalteiler der additiven Gruppe $(R, +)$ ein Ideal von $(R, +, \cdot)$.
9. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Dann ist jeder Normalteiler der Einheitengruppe $R^* = \{a \in R \mid \exists b \in R \text{ mit } ab = 1\}$ ein Ideal von $(R, +, \cdot)$.
10. A_n ist stets ein Normalteiler von S_n.
11. A_n ist stets eine einfache Gruppe.
12. Zyklische Gruppen sind einfach.
13. Jede Untergruppe einer einfachen Gruppe ist einfach.

14. Sei G eine Gruppe die auf einer Menge X operiert. Diese Operation ist transitiv genau dann wenn für jedes endliche Tupel $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ ein $g \in G$ existiert mit $g.x_i = x_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $gx_n = gx_1$.

15. Sei G eine Gruppe die auf einer endlichen Menge X mit n Elementen operiert. Dann ist die Operation transitiv genau dann wenn die induzierte Abbildung $G \to S_n$ surjektiv ist.

16. Sei G eine Gruppe die auf einer endlichen Menge X mit n Elementen operiert. Dann ist die Operation treu genau dann die induzierten Abbildung $G \to S_n$ injektiv ist.

17. Sei G eine endliche Gruppe. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ für das es eine Injektion $G \hookrightarrow S_n$ gibt.

18. Sei K ein Körper. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein irreduzibles Polynom $P \in K[X]$ mit $\deg P = n$.

19. Seien L_1, L_2 Körpererweiterungen von K. Dann ist L_1 eine Körpererweiterung von L_2 oder umgekehrt.

20. Seien $a, b \in \mathbb{C}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ mit $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = n$ und $[\mathbb{Q}(b) : \mathbb{Q}] = m$. Dann ist $[\mathbb{Q}(a, b) : \mathbb{Q}] = nm$.

21. Sei $P \in \mathbb{Q}[X]$ ein Polynom. Dann ist $\mathbb{Q}[X]/(P)$ ein Körper und $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[X]/(P) = \deg P$.

Aufgabe .2: Üben Sie Aufgaben im Stil von 3.2, bis Sie denken, dass Sie simultane Kongruenzen lösen können.

Aufgabe .3: Sei m, N teilerfremde ganze Zahlen. Beweisen Sie: Es gibt eine ganze Zahl $n \geq 1$ mit

$$N | (m^n - 1).$$

Aufgabe .4: Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass p ein Teiler von $(p-1)!+1$ ist.

Aufgabe .5: Finden Sie, bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen von Ordnung 100. Geben Sie in jeder einen Normalteiler von Ordnung 10 an.

Aufgabe .6: Sei G eine Gruppe und sei (G, G) der Kommutator, also die Untergruppe die von allen Elementen der Form $aba^{-1}b^{-1} \in G$ erzeugt wird. Siehe auch Aufgabe 3.4.

1. Zeigen Sie: Jeder Automorphismus $\varphi : G \xrightarrow{\sim} G$ erfüllt $\varphi((G, G)) = (G, G)$. Folgern Sie daraus, dass (G, G) ein Normalteiler ist.

2. Zeigen Sie, dass $G/(G, G)$ abelsch ist.

3. Sei $p : G \to G/(G, G)$ die Projektion $p(g) = g(G, G)$. Zeigen Sie: Für jeden Gruppenhomomorphismu $\alpha : G \to H$, wobei H abelsch ist, gibt es einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $\tilde{\alpha} : G/(G, G) \to H$, so dass $\alpha = \tilde{\alpha} \circ p$.

Aufgabe .7: Sei G eine Gruppe mit Zentrum $Z = Z(G)$. Sei G/Z zyklisch. Zeigen Sie, dass dann G bereits abelsch ist.

Aufgabe .8: Bestimmen Sie die Ordnung von $\sigma \in S_{10}$, gegeben durch

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 3 & 8 & 9 & 6 & 5 & 4 & 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe .9: Zeigen Sie, dass S_n von einem n-Zykel zusammen mit einer Transposition $(i, i+1)$ erzeugt wird.
(Hinweis: Aufgabe 4.1)

Aufgabe .10: Zeigen Sie:

1. Sei G eine Gruppe, N ein Normalteiler von G und H eine Untergruppe von G. Dann ist auch $HN = \{hn \in G \mid h \in H \text{ und } n \in N\}$ eine Untergruppe von G, N ein Normalteiler von HN und die Gruppe $H \cap N$ ein Normalteiler von H. Weiter gilt:
$$H/(H \cap N) \cong (HN)/N$$

2. Sei G eine Gruppe, H ein Normalteiler von G und N ein Normalteiler von H die auch ein Normalteiler von G ist. Also $H \lhd G$, $N \lhd G$, und $N \lhd H$. Weiter gilt:
$$(G/N)/(H/N) \cong G/H$$

Aufgabe .11: Füllen Sie ein Tic-Tac-Toe (also eine 3×3 Matrix) mit 5 $\times$ und 4 $\circ$ Symbolen. Zwei solcher Matrizen heißen *äquivalent* wenn sich eine durch Drehungen und Spiegelungen in die andere überführen lässt. Wie viele Äquivalenzklassen gibt es?
(Hinweis: Aufgabe 5.4)

Aufgabe .12: Seien $P = X^8 + X$ und $Q = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ Polynome in $\mathbb{F}_5[X]$. Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(P, Q)$.

Aufgabe .13: Sei $P = X^3 + 2X - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

1. Geben Sie eine Basis von $\mathbb{Q}[X]/(P)$ an.
2. Berechnen Sie das multiplikative Inverse von $X^2 + X + (P)$ in $\mathbb{Q}[X]/(P)$ bezüglich Ihrer Basis.

Aufgabe .14: Sei $P \in K[X]$ irreduzibel und $\deg P = n$ und sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K. Sei L der kleinste Teilkörper von $\overline{K}$ über dem P in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie, dass $[L : K] | n!$.

Aufgabe .15: Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Wenn n nicht prim ist, dann ist auch $2^n - 1$ nicht prim.

Aufgabe .16: Sei R ein Ring. Ein Element $a \in A$ heißt *nilpotent* wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a^n = 0$. Zeigen Sie: Die Menge der nilpotenten Elemente von R ist ein Ideal und in allen maximalen enthalten.

Aufgabe .17: Nehmen Sie an, sie hätten ein perfektes 7-eck in $\mathbb{C}$ gegeben. Können Sie dann ein 35-Eck konstruieren?

Aufgabe .18: Sei $p \in \mathbb{N}$ prim. Wir definieren $\nu_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ mit

$$\nu_p(a) = \max \{ n \in \mathbb{N}_0 \mid p^n | a \} .$$

Weiter definieren wir $\nu_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ durch

$$\nu_p \left(\frac{a}{b} \right) = \nu_p(a) - \nu_p(b).$$

Zeigen Sie, dass $|\alpha|_p := p^{-\nu_p(\alpha)}$ einen Betrag auf $\mathbb{Q}$ definiert.