Übungen zur Vorlesung "Algebra und Zahlentheorie" WS16/17 Probeklausur

---

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws17/azt/

Bei Fragen zur Vorlesung wenden Sie sich frühzeitig an Ihren Tutor oder Ihre Tutorin.

Aufgabe P.1: Bewerten Sie die folgenden Aussagen mit Wahr oder Falsch und geben Sie eine kurze Begründung:

1. Das Bild eines Gruppenhomomorphismus ist eine Untergruppe.
2. Jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe ist ein Normalteiler.
3. Sei G eine Gruppe die auf einer Menge X operiert. Die Vereinigung aller Standgruppen G_x für $x \in X$ erzeugt G.
4. Sei p eine Primzahl, dann ist $X^p - p \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$.
5. $X^9 + X^8 + X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ ist in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel.
6. Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung und $H \subset \mathrm{Gal}(L/K)$ eine Untergruppe. Dann ist $H = \mathrm{Gal}(L^H/K)$.
7. Jedes echte Ideal in $\mathbb{Z}$ ist maximal.
8. Ein Polynom ist separabel, genau dann wenn es teilerfremd zu seiner Ableitung ist.

Aufgabe P.2: Bestimmen sie den größten gemeinsamen Teiler von $P = X^3 - 4X^2 + X + 6$ und $Q = X^5 + X^2 - X - 1$ in $\mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe P.3: Bestimmen Sie das Minimalpolynom der primitiven 12-ten Einheitswurzeln über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe P.4: Bestimmen Sie die Galoisgruppe und alle Zwischenkörper des Zerfällungskörpers des Polynoms $X^6 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe P.5: Sei K ein Körper und $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss. Seien $M, L \subset \overline{K}$ Teilkörper, so dass L/K und M/K endlich sind. Sei LM der kleinste Teilkörper von $\overline{K}$, der L und M enthält. Zeigen Sie: LM/K ist eine endliche Körpererweiterung.

Aufgabe P.6: Sei G eine Gruppe von Ordnung 28. Zeigen Sie, dass G auflösbar ist.