

ADELE
SEMINARPROGRAMM

Übersicht

Man kennt aus der Analysis sicher die Fourier-Reihen

$$f(z) = \sum a_n e^{2\pi i n z},$$

die einer periodischen Funktion auf \mathbb{R} die eindeutig bestimmten Fourier-Koeffizienten $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ zuordnen. Nun kann man sich eine periodische Funktion auch als Funktion $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ auf dem Kreis vorstellen. Die Darstellung als Fourier-Reihe identifiziert dabei L^2 -Funktionen auf dem Kreis S^1 mit quadrat-integrablen Fourier-Koeffizienten, die wir auch als Funktion auf \mathbb{Z} (nämlich $n \mapsto a_n$) verstehen können. Insgesamt bekommen wir einen Isomorphismus von Hilberträumen

$$L^2(S^1, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}).$$

Dann hat man vielleicht von der Fourier-Transformation für L^2 -Funktionen auf \mathbb{R} gehört. Hier muss die Funktion nicht länger periodisch sein. Diese Fourier-Transformation lässt sich als Isomorphismus

$$L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

auffassen.

Diese zwei relativ populären Methoden aus der Analysis besitzen eine gemeinsame Verallgemeinerung. Ist G eine lokalkompakte abelsche (LCA) topologische Gruppe, so gibt es eine ganz allgemeine Fourier-Transformation, einen Isomorphismus

$$L^2(G, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} L^2(G^\vee, \mathbb{C}),$$

wobei G^\vee die sogenannte *Pontryagin-duale* Gruppe zu G ist. Die zwei Beispiele von oben gehören gerade zu

$$\begin{array}{ll} G := S^1 & \text{und} \quad G^\vee = \mathbb{Z}, \\ G := \mathbb{R} & \text{und} \quad G^\vee = \mathbb{R}. \end{array}$$

Es gibt allerdings noch sehr viele andere LCA Gruppen und dann jeweils eine zugehörige Fourier-Transformation. Beispielsweise ist jede diskrete abelsche Gruppe G (trivialerweise) lokalkompakt. Sie besitzt dann eine Fourier-Transformation mit Werten auf der dualen Gruppe G^\vee (die dann stets eine kompakte Gruppe ist). Oft ist es nicht leicht, sich G^\vee konkret vorzustellen. Pontryagin Dualität besagt schließlich, dass $G^{\vee\vee} \simeq G$, d.h. der Doppel-Dual von G ist wieder isomorph zu G selbst.

Die Idee zu dieser "allgemeinen Fourier-Transformation" stammt von André Weil um 1940.

Besonders aufregend ist der Fall $G := F$, wobei F ein Zahlkörper ist. Es gibt dann eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow \mathbb{A}_F \longrightarrow F^\vee \longrightarrow 0, \tag{1}$$

wobei F^\vee die Pontryagin-duale Gruppe zu F ist (eine kompakte und zusammenhängende topologische Gruppe) und \mathbb{A}_F die sogenannten *Adèle* des Zahlkörpers. Tate und Iwasawa haben gezeigt, dass sich die Dedekind Zetafunktion (sowie L -Reihen...) eines Zahlkörpers besonders elegant über die Fourier-Theorie behandeln lässt. Insbesondere gibt dies einen sehr eleganten Beweis für die analytischen Eigenschaften (Fortsetzung und Funktionalgleichung) der Dedekind Zetafunktion. Dies werden die abschließenden Resultate des Seminars sein.

Diese Resultate sind von großer Bedeutung in der Zahlentheorie. Sie liefern z.B. ganz konkret

- explizite Formeln für Klassenzahlen (sofern der Regulator bekannt ist...)
- starke Sätze über das Verhalten von Primidealen in Zahlkörpern (oder allgemeiner die Verallgemeinerung praktisch aller Resultate aus der analytischen Zahlentheorie von \mathbb{Q} auf beliebige Zahlkörper)
- sehr starke Abschätzungen für Regulatoren (z.B. folgt, dass es einen Zahlkörper mit kleinstmöglichem Dirichlet-Regulator gibt; dieses Resultat wird zum größten Teil über analytische Eigenschaften der Zetafunktion bewiesen)
- Ideen zur expliziten Klassenkörpertheorie,
- das motivierende "toy model" für ein weitreichendes Netz an Vermutungen in der Zahlentheorie und arithmetischen Geometrie.

Ablauf:

Literaturangaben "[RV]" beziehen sich jeweils auf das Buch Ramakrishnan, Valenza "Fourier analysis on number fields" (Springer Verlag, 1999), ansonsten siehe das Literaturverzeichnis am Ende.

Generell folgen wir Ramakrishnan und Valenza und weitere Literaturangaben dienen nur zur Bereicherung dieser Quelle.

1. Topologische Gruppen und was ist das Haar-Maß ([RV], Kapitel 1, 1.1 und 1.2)

Schaffen Sie die Grundlagen zum Begriff der topologischen Gruppe. Definition. Einige Beispiele. Gehen Sie besonders auf *lokalkompakte Gruppen* ein. Skizzieren Sie die Konstruktion des Haar-Maßes auf lokalkompakten Gruppen.

Wichtig: Mit dem Haar-Maß kann man auch recht gut als Black Box arbeiten. Daher ist es wichtiger, dass Sie erklären was die Eigenschaften des Haar-Maßes sind als dass die Konstruktion völlig durchdiskutiert wird.

Dieser Vortrag hat einen starken Fokus auf Topologie.

2. Pro-endliche Gruppen ([RV], Kapitel 1, 1.3-1.4)

Führen Sie pro-endliche (bzw. profinite) Gruppen ein. Natürliche Beispiele: Die p -adischen Zahlen \mathbb{Z}_p , die Galoisgruppe einer (unendlichen) Körpererweiterung. Pro- p Gruppen, Sylowgruppen in pro-endlichen Gruppen (siehe für alternative Darstellungen z.B. Shatz, Chapter 1 erklärt, oder Serre, Chapter 1, §1). Falls Sie Galoisgruppen bisher nur für endliche Körpererweiterungen gesehen haben, lohnt sich womöglich ein Blick in weitere Literatur, z.B. in Lang's Algebra oder den "Appendix", §1, §2 zu Washington, "Introduction to Cyclotomic Fields, 2ed", Springer.

Eine wichtige Rolle dieses Vortrages ist es, Intuition für pro-endliche Gruppen zu schaffen, oder allgemeiner topologische Torsionsgruppen. Während Beispiele wie \mathbb{R} und \mathbb{C} für LCA Gruppen allen bekannt sind, sind Gruppen wie \mathbb{Z}_p , $\mathbb{F}_p[[t]]$ zunächst vielleicht etwas weniger vertraut. Sie spielen aber eine zentrale Rolle für das Seminar.

3. Darstellungstheorie von lokalkompakten Gruppen ([RV], Kapitel 2)

Man kann die Theorie nur übersichtshaft darstellen. Eine zentrale Rolle nehmen Banach-Algebren und die Gelfand-Transformierte ein.

Dieser Vortrag eignet sich besonders für Personen, die Funktionalanalysis mögen.

Man muss *stark kürzen*: z.B. die Spektraltheorie. Man könnte versuchen Resultate, die im

Rahmen der klassischen linearen Algebra "sehr plausibel" wirken, nur als Analogie zu erklären und nicht wirklich zu beweisen.

Die Darstellung im Buch ist recht ausführlich. Für mehr Hintergrundwissen und eine alternative Darstellung: Eberhard Kaniuth - A Course in Commutative Banach Algebras. In Kapitel 1 findet man alle Grundlagen zu Banachalgebren. In Kapitel 2, Abschnitt 2.7 "The Gelfand representation..." wird $L^1(G)$ ebenfalls diskutiert. Eine andere Darstellung findet man in Loomis, Chapter IV.

4. **Dualitätstheorie für lokalkompakte Gruppen I** ([RV], Kapitel 3, 3.1-3.2 einschließlich)
5. **Dualitätstheorie für lokalkompakte Gruppen II** ([RV], Kapitel 3, 3.3-3.4 einschließlich)
Diese zwei Talks sollten gemeinsam oder jedenfalls in enger Kommunikation vorbereitet werden. Die Quelle enthält viel zu viel Material. Die wirklich wichtigen Resultate sind: Pontryagin Dualität und die Fourier Transformation mitsamt ihrer Eigenschaft invertierbar zu sein, Plancherel Theorem.

Eine andere Darstellung des gleichen Ansatzes findet man in Loomis, Chapter VII.

Es gibt auch völlig andere Beweise für Pontryagin-Dualität. Eine andere Methode liegt darin, die Dualität erst für bestimmte Typen von LCA Gruppen separat zu beweisen, und dann mittels einer groben Strukturtheorie für LCA Gruppen, diese in solche Teile zu zerlegen und die einzelnen Dualitätsaussagen 'zu verkleben'. Dies findet man z.B. in Sidney Morris "Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups" (Cambridge University Press). Wir wollen aber dennoch der Methode in Ramakrishnan-Valenza folgen. Die Methode über die Gelfand-Transformierte wird heutzutage hauptsächlich verwendet. Die Idee dazu stammt von Raikov, ebenfalls aus den Vierzigerjahren.

6. [kann notfalls mit Vortrag 7 zusammengelegt werden] **Lokalkompakte Körper** ([RV], Kapitel 4, 4.1-4.2 einschließlich)

Theorem 4-12 soll im Mittelpunkt stehen. Die große Idee ist, dass die Präsenz einer lokalkompakten nicht-diskreten Topologie die mögliche algebraische Struktur eines Körpers stark einschränkt. Der Begriff des "Modulus" ermöglicht dabei Zugriff auf die Metrik, wobei er selbst lediglich auf maßtheoretischen Aspekten beruht [bzw. der Eindeutigkeit des Haarmaßes bis auf positive Skalare].

7. **Erweiterungen lokaler Körper, Absolutbeträge, Satz von Ostrowski** ([RV], Kapitel 4, 4.3-4.5)

Es geht in 4.3 zunächst um die Grundlagen der Theorie, wie sich die Struktur lokalen Körpers auf endliche Erweiterungen fortsetzt. Verzweigungsindex, Residuenkörper. In 4.4 wird diese Theorie mit Zahlkörpern in Verbindung gebracht. Im Mittelpunkt stehen die Begriffe der (endlichen oder unendlichen) Stellen ('places'), sowie Ostrowskis Theorem, was die Stellen von Zahlkörpern klassifiziert.

Besonders in 4.5 muss stark gekürzt werden.

Dieser Vortrag eignet sich besonders für Personen mit Interesse an algebraischer Zahlentheorie und ist wesentlich algebraischer als die vorherigen Themen.

8. **Adele** ([RV], Kapitel 5, 5.1-5.3 einschließlich)

Hier werden nun die namensgebenden Adele \mathbb{A} eingeführt. Eine besondere LCA Gruppe, die zu einem Zahlkörper gehört. (siehe Gleichung 1) Restricted Products, die auch "lokale direkte Produkte" genannt werden sollen diskutiert werden.

9. **Idelklassengruppen und klassische Klassengruppen** ([RV], Kapitel 5, 5.4-Ende, sowie Kapitel 6, 6.1-6.4 einschließlich)

Dies ist sehr viel Material. Es geht um die Definition der Idelklassengruppe, sowie die Verbindung zur klassischen Klassengruppe. Diese Definitionen ergeben erst so richtig Sinn, nachdem man ihre Bedeutung in der Klassenkörpertheorie sieht. Es wäre aber völlig hoffnungslos dies auch nur grob beweisen zu wollen; das ist eine ganze Vorlesung für sich. Die Idee dieses Vortrags ist daher, einen Ausblick zu bieten, was hinter der Idelklassengruppe steckt.

Obwohl dieser Vortrag viele übersichtshafte Elemente enthält, wäre es wichtig, dass die Definition der Idele, der Idelklassengruppe, sauber sitzt, da sie auch außerhalb der Klassenkörpertheorie wichtig ist.

Dieser Vortrag setzt ein solides Interesse an algebraischer Zahlentheorie voraus. Er ist vom Stil her deutlich algebraisch.

10. **Tate's Doktorarbeit / Tate-Iwasawa Beweis der Funktionalgleichung** ([RV], Kapitel 7, 7.1-7.3 einschließlich)

Dieses Thema ist die Krönung des Seminars. Je nachdem wie viele Teilnehmer sich finden, kann dieses Thema auf mehrere Vorträge aufgeteilt werden. Es ist ausgesprochen elegant und der Höhepunkt des Themas.

Die Anwendung auf algebraische Kurven soll komplett weggelassen werden, dies führt zu weit. Wir wollen lediglich auf 7-16 Theorem hinsteuern, die meromorphe Fortsetzung der Zetafunktion sowie die Funktionalgleichung.

11. **(optional, Ende I) Die analytische Klassenzahlformel** ([RV], Kapitel 7, Theorem 7-21, wenn gewünscht: Theorem 7-25, 7-26)

12. **(optional, Ende II) Algebraische Kurven und der Satz von Riemann-Roch**

In dieser Variante soll es um die Anwendung des Riemann-Roch Theorems auf algebraische Kurven gehen, was in [RV], 7.1-7.3 eingestreut war.

Praktisch jegliches Material, was wir über LCA Gruppen oder Pontryagin Dualität nutzen, findet man auch in dem Buch von Hewitt und Ross. Die Notation ist allerdings in die Jahre gekommen und das Buch geht in einer anderen Methodik vor. Ein Blick in diese Quelle kann sich dennoch lohnen.

Literatur

HEWITT, ROSS - Abstract Harmonic Analysis I, Springer

LOOMIS - Introduction to Abstract Harmonic Analysis, D. Van Nostrand

RAMAKRISNAN, VALENZA - Fourier theory on number fields, Springer

SHATZ - Profinite groups, arithmetic and geometry, Princeton University Press

SERRE - Galois cohomology, Springer