"Lineare Algebra"
WS 2018/19 — Übungsblatt 7

Ausgabe: 29.11.2018, **Abgabe:** 7.12.2018

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws18/la.html

Sie erhalten zusätzlich 2 Punkte für das Ausfüllen des Online-Tests. Diese sind Teil der Pflichtwertung. Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 7.1:

1. Wir identifizieren die Ebene mit dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Ist die Spiegelung an einer gegebenen Geraden in der Ebene eine lineare Abbildung? (Es genügt ein informelles Argument anhand einer Skizze.)
2. Ist die Abbildung $M_2(k) \to k : M \mapsto \det(M)$ linear?
3. Ist die Abbildung $M_n(k) \to k : M \mapsto \operatorname{tr}(M) := \sum_i m_{ii}$ linear?

(3 Punkte)

Aufgabe 7.2:
Betrachte die lineare Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ welche durch die folgende Matrix gegeben wird:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie jeweils eine Basis von Kern und Bild.

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 7.3: Sei k ein Körper. Die Menge der Polynome (in X) mit Koeffizienten aus k bildet einen k-Vektorraum

$$k[X] = \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \mid a_i \in k, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Falls $a_n \neq 0$ heißt ein Polynom $a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ **vom Grad** n.

1. Bestimmen Sie eine Basis von $k[X]$.
2. Beweisen Sie, dass die (formale) Ableitung

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} : k[X] \to k[X]$$

   eine lineare Abbildung ist.
3. Ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$ ein Mono-, Epi- oder Isomorphismus...
   (a) im Fall $k = \mathbb{R}$?
   (b) im Fall $k = \mathbb{F}_2$?
4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $V_n \subset k[X]$ der Vektorraum, der von allen Polynomen mit Grad $\leq n$ erzeugt wird.

   Beweisen Sie, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$ zu einer linearen Abbildung

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} : V_n \to V_n$$

   einschränkt. Bestimmen Sie eine Basis von Kern und Bild hiervon im Fall $k = \mathbb{R}$ und $k = \mathbb{F}_2$.

(8 Punkte)

Bonus-Aufgabe 7.4: Wir betrachten noch einmal den $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\mathfrak{P}(X)$ (siehe Aufgabe 4.2), wobei X eine endliche Menge ist. Geben Sie einen Isomorphismus von $\mathbb{F}_2$-Vektorräumen

$$\mathfrak{P}(X) \cong \mathrm{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$$

an.
Beweisen Sie, dass es sich um einen Isomorphismus handelt.

(4 Punkte)