Erweiterung der Analysis
Wintersemester 2020/2021

Oliver Bräunling
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws20/ErweitAnalysis

11. Übungsblatt

Abgabetermin 5.2.2021

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie können Übungsblätter in Gruppen von bis zu 2 Studierenden abgeben.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Übung 11.1 Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Jede unendlich oft differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist auch holomorph aufgefasst als Funktion von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{C}$.

(ii) Die Funktion $f\colon \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \frac{1}{z}$ ist holomorph.

(iii) Die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = z\overline{z}$ ist holomorph.

(iv) Es sei $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ eine konvergente komplexe Folge mit $z_n \to 0$, dann existiert auch

$$\sum_{k=1}^{\infty}(z_{n+1} - z_n).$$

Übung 11.2 (Cauchy'sche Integralformel für Polynome) Es sei $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots a_n z^n$ ein komplexes Polynom. Zeigen Sie, dass für alle $\xi \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ die Formel

$$f^{(k)}(\xi) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-\xi)^{k+1}}\,\mathrm{d}z$$

gilt, wobei $\gamma(t) = \xi + re^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$ gilt und $f^{(k)}$ die k-te komplexe Ableitung bezeichne.
Hinweis: Warum genügt es, dass Sie die Formel für $f(z) = z^n$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ zeigen?

Übung 11.3 Wir betrachten für $a, b > 0$ die Wege $\alpha, \beta\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\alpha(t) = a\cos(t) + \mathrm{i}a\sin(t) \quad \text{und}$$
$$\beta(t) = a\cos(t) + \mathrm{i}b\sin(t)$$

(i) Zeigen Sie die Gleichung $\oint_\alpha \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \oint_\beta \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$

Hinweis: Sie dürfen den Cauchy'schen Integralsatz verwenden und, dass $\frac{1}{z}$ holomorph in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist . (Vielleicht möchten Sie Ihre Antwort bei Aufgabe 1 (*ii*) nochmal überdenken.)

(ii) Benutzen Sie (i) um die Gleichung

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{ab}$$

zu zeigen.

Hinweis: Die Gleichung in (i) gilt insbesondere auch für die Imaginärteile der beiden Seiten.

Übung 11.4 Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + iv(x, y)$, so dass u, v zwei mal stetig differenzierbar sind. Zeigen Sie:

(i) $\Delta(u) = \Delta(v) = 0$

(ii) $f(0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}z$ für $\gamma(t) = r\mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ und $r > 0$.

Hinweis: Sie dürfen die Ergebnisse von Aufgabe 10.2 verwenden.