Oliver Bräunling
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws20/ErweitAnalysis

3. Übungsblatt

Abgabetermin 27.11.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie können Übungsblätter in Gruppen von bis zu 2 Studierenden abgeben.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Übung 3.1 Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Es sei $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Quader und $f\colon Q \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn

$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{Q_{-1}} f(\underline{x})\, \mathrm{d}\underline{x}_{-1} \right) \mathrm{d}x_1$$

existiert, dann ist f integrierbar.

(ii) Jede endliche Menge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ ist eine Jordan-Nullmenge.

(iii) Jede abzählbare beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ ist eine Jordan-Nullmenge.

(iv) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ eine beschränkte Menge, so dass $\bar{A}$ und A° Jordan-messbar sind, dann ist auch A Jordan-messbar.

Übung 3.2 Es sei $Q = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie

$$\int_Q x\mathrm{e}^{xy}\, \mathrm{d}(x,y).$$

Begründen Sie dabei jeden Schritt.

Übung 3.3 Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass der Graph

$$\mathrm{graph}(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1]\}$$

eine Jordan-Nullmenge ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Zeigen Sie zunächst, dass für jedes Intervall $[a,b] \subseteq [0,1]$

$$\mathrm{graph}(f\big|_{[a,b]}) \subseteq Q_{(f,[a,b])} := [a,b] \times [\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)]$$

gilt.

2. Zeigen Sie mit Hilfe der Stetigkeit von f, dass es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\lambda(Q_{(f,[\frac{i}{N},\frac{i+1}{N}])}) \leq \frac{\epsilon}{N}$$

für alle $i \in \{1, \ldots, N-1\}$.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass jede stetige Funktion auf einem Kompaktum gleichmäßig stetig ist.

Was können Sie jetzt über $\lambda^*(\mathrm{graph}(f))$ sagen?

Übung 3.4 Seien $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^d$ zwei Quader. Zeigen Sie, dass für die Quadersumme $Q_1 \cup Q_2$ die Gleichheit

$$\lambda(Q_1 \cup Q_2) = \lambda(Q_1) + \lambda(Q_2) - \lambda(Q_1 \cap Q_2)$$

gilt.