Erweiterung der Analysis
Wintersemester 2020/2021

Oliver Bräunling
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws20/ErweitAnalysis

5. Übungsblatt

Abgabetermin 11.12.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie können Übungsblätter in Gruppen von bis zu 2 Studierenden abgeben.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Übung 5.1 Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Es sei $A \in \mathbb{R}^d$ beschränkt mit $\lambda^*(A^\circ) = 0$, dann ist A eine Jordan-Nullmenge.

(ii) Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$, dann gilt $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.

(iii) Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}^d$. Dann ist $\lambda(\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}) = 0$.

(iv) Es sei $M \subseteq [0,1]$ eine Jordan-Nullmenge, dann ist M endlich.

Übung 5.2 In der Vorlesung haben wir gesehen, dass man das Volumen einer Kugel mit Hilfe des Transformationssatzes berechnen kann. In dieser Aufgabe geht es darum eine andere Methode zu verwenden. Berechnen Sie das Volumen der Kugel

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$$

für $r > 0$ mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri.
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 4.4 um die 2-dimensionalen Integrale zu berechnen.

Übung 5.3 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar und $h > 0$. Wir betrachten die Menge

$$K := \big\{((1-t)x, (1-t)y, th) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in A,\ t \in [0,1]\big\}.$$

Benutzen Sie das Prinzip von Cavalieri um zu zeigen, dass

$$\lambda(K) = \frac{h}{3}\lambda(A).$$

Sie müssen nicht zeigen, dass K Jordan-messbar ist. Welchem geometrischen Objekt entspricht K?

Übung 5.4 Berechnen Sie das Integral

$$\int_H y \,\mathrm{d}(x,y)$$

mit

$$H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}.$$

Hinweis: Polarkoordinaten!