Erweiterung der Analysis
Wintersemester 2020/2021

Oliver Bräunling
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws20/ErweitAnalysis

6. Übungsblatt

Abgabetermin 18.12.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie können Übungsblätter in Gruppen von bis zu 2 Studierenden abgeben.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Übung 6.1 Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Eine $\mathcal{C}^2$-Kurve $\underline{\gamma}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ ist genau dann nach der Bogenlänge parametrisiert, wenn

$$\langle \underline{\gamma}'(t), \underline{\gamma}''(t) \rangle = 0$$

für alle $t \in (a,b)$ gilt.

(ii) Es sei $d > 0$, dann ist jede sternförmige Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ auch konvex.

(iii) Das Vektorfeld $\underline{f}\colon \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\underline{f}(x,y) = \Big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\Big)$$

ist ein Gradientenfeld.

(iv) Sei A wegweise zusammenhängende offene Teilmenge im $\mathbb{R}^d$. Definiere für $x, y \in A$

$$d(x,y) := \inf\Big\{ \int_{\underline{\gamma}} 1 \,\mathrm{d}\underline{x} \;\Big|\; \gamma \in \mathcal{C}^1([0,1], A),\ \gamma(0) = x \text{ und } \gamma(1) = y \Big\}.$$

Dann ist d eine Metrik.

Übung 6.2 (Rotationskörper) Es seien $h > 0$ und $f\colon [0,h] \to \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten den *Rotationskörper* von f

$$R_f := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0,h],\ x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\lambda(R_f) = \pi \int_0^h f(t)^2 \,\mathrm{d}t.$$

Übung 6.3 Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ eine $\mathcal{C}^1$-Kurve mit $\|\gamma'(t)\| > 0$ für alle $t \in (a,b)$. Zeigen Sie, dass man γ nach der Bogenlänge parametrisieren kann, d.h. dass ein bijektives $\phi\colon [c,d] \to [a,b]$ mit $\phi'(s) > 0$ für alle $s \in (c,d)$ existiert, so dass $\gamma \circ \phi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Hinweis: Es ist einfacher ϕ^{-1} zu konstruieren.

Übung 6.4 Es seien $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g(x) \le f(x)$ für alle $x \in [0,1]$. Wir betrachten die geschlossene stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve $\underline{\gamma}\colon [0,4] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\underline{\gamma}(t) = \begin{cases} (t, g(t)), & \text{für } t \in [0,1] \\ (1, (2-t)g(1) + (t-1)f(1)), & \text{für } t \in [1,2] \\ (3-t, f(3-t)), & \text{für } t \in [2,3] \\ (0, (4-t)f(0) + (t-3)g(0)), & \text{für } t \in [3,4] \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\oint_{\underline{\gamma}} \underline{F}(\underline{x}) \cdot \mathrm{d}\underline{x} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$$

für

$$\underline{F}(x,y) = (0,x) \text{ und für } \underline{F}(x,y) = (-y,0).$$