Erweiterung der Analysis
Wintersemester 2020/2021

Oliver Bräunling
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws20/ErweitAnalysis

7. (Weihnachts-)Übungsblatt

Abgabetermin 8.1.2021

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie können Übungsblätter in Gruppen von bis zu 2 Studierenden abgeben.
Jede Aufgabe wird mit 4 Bonuspunkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Übung 7.1 Beweisen, widerlegen oder basteln Sie:

(i) Die *komplette* Kugeloberfläche ist eine Einbettung eines Flächenstücks.

(ii) Basteln Sie eine Fläche die kein stetiges Einheitsnormalenfeld beitzt und erläutern Sie kurz warum das der Fall ist. (Ein formeller Beweis ist nicht nötig.)

(iii) Für $D \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix und $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Parallelogramm, dann ist $D(S)$ ein Parallelogramm mit $\lambda_2(D(S)) = |\det D|\lambda_2(S)$.

(iv) Es seien $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$, dann gilt

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \times \underline{c} \rangle = \det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}).$$

Übung 7.2 Es sei $K_{\frac{1}{2}}$ die Oberfläche einer Halbkugel mit Radius 1, also

$$K_{\frac{1}{2}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Berechnen Sie

$$\int_{K_{\frac{1}{2}}} (2z, \mathrm{e}^x, 1) \cdot \mathrm{d}(x, y, z).$$

Übung 7.3 Es sei $F \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche und es sei $\underline{\phi}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass $\underline{\phi}(F)$ auch eine Fläche ist und, dass für $\underline{x} \in F$

$$T_{\underline{\phi}(\underline{x})}\underline{\phi}(F) = \{\underline{\phi}(\underline{x}) + D\underline{\phi}(\underline{x})\underline{v} \mid \underline{x} + \underline{v} \in T_{\underline{x}}F\}$$

gilt, wobei $T_{\underline{\phi}(\underline{x})}\underline{\phi}(F)$ die Tangentialebene von $\underline{\phi}(F)$ an $\underline{\phi}(\underline{x})$ und $T_{\underline{x}}F$ die Tangentialebene von F an $\underline{x}$ bezeichne. Zeigen Sie mit einem expliziten Gegenbeispiel, dass dies für den Normalenvektor nicht gilt, also dass

$$D\underline{\phi}(\underline{x})\underline{n}(\underline{x})$$

im Allgemeinen nicht senkrecht zu $T_{\underline{\phi}(\underline{x})}\underline{\phi}(F)$ steht.

Hinweis: Lineare invertierbare Abbildungen sind Diffeomorphismen.

Übung 7.4 Es seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $h > 0$ mit $f(z) > 0$ für alle $z \in [0, h]$. Wir betrachten die Menge

$$O_{R_f} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq f(z),\ z \in (0, h),\ x^2 + y^2 = f(z)^2\}.$$

Zeigen Sie, dass O_{R_f} eine Einbettung eines Flächenstücks ist und, dass

$$\int_{O_{R_f}} 1 \,\mathrm{d}\underline{x} = 2\pi \int_0^h f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Welche aus der Schule bekannte Formel haben Sie gerade hergeleitet?