Oliver Bräunling
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws20/ErweitAnalysis

8. Übungsblatt

Abgabetermin 15.1.2021

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie können Übungsblätter in Gruppen von bis zu 2 Studierenden abgeben.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Übung 8.1 Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Es sei A offen und Jordan-messbar und $g \in \mathcal{C}^2_c(A, \mathbb{R})$, dann gilt $\int_A \Delta g(\underline{x})\,\mathrm{d}\underline{x} = 0$.

(ii) Es sei A offen und Jordan-messbar und $f, g \in \mathcal{C}^2_c(A, \mathbb{R})$, dann gilt $\int_A f\Delta(g)(\underline{x})\,\mathrm{d}\underline{x} = \int_A \Delta(f)g(\underline{x})\,\mathrm{d}\underline{x}$.

(iii) Es sei $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, dann gilt

$$\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} f) = 0.$$

Hinweis: Definition 2.46

(iv) Es sei A offen und Jordan-messbar und $f \in \mathcal{C}^1_c(A, \mathbb{R})$, dann gilt für $B \subseteq A$ Jordan-messbar:

$$\int_B \operatorname{div}(f)(\underline{x})\,\mathrm{d}\underline{x} = 0.$$

Übung 8.2 In dieser Aufgabe wollen wir die Existenz von sogenannten Testfunktionen zeigen, das heißt eine Funktion $\phi_{r_1,r_2} \in \mathcal{C}^\infty(R^d, R)$ für $r_1 > r_2 > 0$ mit den Eigenschaften

$$\begin{cases} \phi_{r_1,r_2}(\underline{x}) = 1, & \text{für } \|\underline{x}\| \le r_2 \\ \phi_{r_1,r_2}(\underline{x}) = 0, & \text{für } r_1 \le \|\underline{x}\| \\ 0 \le \phi_{r_1,r_2}(\underline{x}) \le 1, & \text{für } r_1 < \|\underline{x}\| < r_2. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass eine solche Funktion für alle $r_1 > r_2 > 0$ existiert. Benutzen Sie hierzu die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$h(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}, & \text{für } t > 0 \\ 0, & \text{für } t \le 0 \end{cases}$$

und die daraus konstruierte Funktion $g_r \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g_r(t) = \frac{h(t)}{h(t) + h(r-t)}$$

für $r > 0$. Sie müssen natürlich zeigen, dass die Funktionen diffeerenzierbar sind. Zeigen Sie mit Hilfe der von Ihnen konstruierten Funktionen, dass für jedes Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}^d$ und jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $K \subseteq U$ eine Funktion $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ gibt mit

$$\begin{cases} \Phi(\underline{x}) \neq 0, & \text{für } \underline{x} \in K \\ \Phi(\underline{x}) = 0, & \text{für } \underline{x} \in \mathbb{R}^d \setminus U \end{cases}$$

(8 Punkte)

Übung 8.3 Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und Jordan-messbar, $f \in \mathcal{C}^1_c(A, \mathbb{R})$ und $\phi \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie, dass

$$\int_A \langle \underline{\nabla} f(\underline{x}), \phi(\underline{x}) \rangle \, \mathrm{d}\underline{x} = - \int_A f(\underline{x}) \mathrm{div}(\phi)(\underline{x}) \, \mathrm{d}\underline{x}$$

gilt.