Probeklausur zur Vorlesung „Erweiterungen der Analysis“

<u>Teil I:</u> Beweisen oder Widerlegen

<u>Aufgabe 1:</u>
Beweisen oder widerlegen Sie:

1. Jede beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}^3$ ist Jordan-messbar.

2. Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ sternförmig, dann ist auch $A \cap B$ sternförmig.

3. Für jede Funktion $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und jede Jordan-messbare Menge A existiert das Integral
$$\int_A f(\underline{x})\,\mathrm{d}\underline{x}.$$

4. Sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jeden Quader Q integrierbar ist, dann ist f auch stetig.

5. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ ein $\mathcal{C}^1$-Polyeder und es sei $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, dann ist
$$\int_{\partial A} (\underline{\nabla} \times f)(\underline{x}) \cdot \mathrm{d}\underline{x} = 0$$

6. Es sei $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ holomorph, dann ist f ein Gradientenfeld.

<u>Teil II:</u> Vektoranalysis

<u>Aufgabe 2:</u>
Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $\mathscr{C}^\infty$-Funktion und es sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet. Außerdem sei die Abbildung

$$\underline{\kappa}\colon B \ni (u,v) \mapsto (u, v, f(\sqrt{u^2+v^2})) \in \mathbb{R}^3$$

gegeben, so dass $(u,v) \mapsto f(\sqrt{u^2+v^2})$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion ist.

1. Zeigen Sie, dass κ eine Einbettung ist.
2. Berechnen Sie das Einheits-Normalenfeld von $\underline{\kappa}(B)$.

   Hinweis: Je nach Methode ist ein Zwischenergebnis

   $$\underline{n}(u,v,f(\sqrt{u^2+v^2})) = \frac{1}{\sqrt{1+f'(\sqrt{u^2+v^2})^2}}\left(-\frac{f'(\sqrt{u^2+v^2})}{\sqrt{u^2+v^2}}u, -\frac{f'(\sqrt{u^2+v^2})}{\sqrt{u^2+v^2}}v, 1\right)$$

3. Es sei nun $B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 < R^2\}$ für ein $R \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass

   $$\int_{\underline{\kappa}} 1 \,\mathrm{d}\underline{x} = 2\pi \int_0^R r\sqrt{f'(r)^2+1}\,\mathrm{d}r$$

   und berechnen Sie das Integral explizit für $f(x) = x^2$ und $R = \sqrt{2}$.
4. Es sei nun $\underline{g} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ gegeben durch $g(x,y,z) = (0,x,0)$. Berechnen Sie

   $$\int_{\underline{\kappa}} (\underline{\nabla} \times \underline{g})(\underline{x}) \cdot \mathrm{d}\underline{x}.$$

Aufgabe 3:

Für $a, b > 0$ sei $E_{ab} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ die Ellipse die von der Kurve $\underline{\gamma}\colon [0, 2\pi] \ni \phi \mapsto (a\cos(\phi), b\sin(\phi)) \in \mathbb{R}^2$ berandet wird.

1. Benutzen Sie den Satz von Gauß für $a = b = 1$ um zu zeigen, dass

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \pi$$

   gilt.

   Hinweis: Finden Sie eine geeignete Funktion $\underline{f}$ mit $\operatorname{div}(\underline{f}) = 1$ und berechnen Sie

$$\int_{E_{11}} 1\,\mathrm{d}\underline{x}$$

   auf zwei verschiedene Weisen.

2. Benutzen Sie den Satz von Gauß nun erneut um mit den Ergebenissen aus Aufgabe 1.) die Formel

$$\int_{E_{ab}} 1\,\mathrm{d}\underline{x} = ab\pi$$

   zu zeigen.

Teil III: Funktionentheorie

Aufgabe 4:
Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$.

1. Wie lauten die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen für f?
2. Nun sei die Matrix gegeben

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),$$

so dass $f(\underline{x}) = A\underline{x}$. Zeigen Sie, dass f genau dann holomorph ist, wenn $a = d$ und $b = -c$ ist.

3. Es sei nun

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ und $f(\underline{x}) = A\underline{x}$. Zeigen Sie, dass

$$a - \mathrm{i}b = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\underline{\gamma}} \frac{f(z)}{(z - \xi)^2}\,\mathrm{d}z$$

für $\underline{\gamma}\colon [0, 2\pi] \ni t \mapsto \xi + \mathrm{e}^{it} \in \mathbb{C}$ und für $\xi \in \mathbb{C}$ beliebig.