Aufgabe 1.1. Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung

$$x^4 - 4x^2 - 8x + 2 = 0$$

mit den Cardano'schen Formeln. Geben Sie den Rechenweg und eine Quelle, die Sie benutzt haben, an.

(6 Punkte)

Aufgabe 1.2. Es seien G und G' Gruppen mit den neutralen Elementen $e \in G$ und $e' \in G'$. Es sei $f\colon G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $f(e) = e'$.

(b) Für alle $a \in G$ gilt $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

Lean ist ein Computerprogramm, das man benutzen kann, um mathematische Beweise zu überprüfen. Unser Kollege Dr. Johan Commelin arbeitet gerade zusammen mit Prof. Dr. Peter Scholze, um den Beweis eines seiner Sätze mit Lean zu überprüfen. Sie können gerne versuchen, Ihren Beweis zum Teil (a) dieser Aufgabe mit Lean zu überprüfen. Hinweise dazu finden Sie am Ende dieses Übungsblattes!

(4 Punkte)

Aufgabe 1.3. Es sei M eine Menge und $*_1, *_2\colon M \times M \to M$ zwei Abbildungen, so dass $(M, *_1)$ und $(M, *_2)$ Gruppen sind. Für alle $a, b, c, d \in M$ gelte

$$(a *_1 b) *_2 (c *_1 d) = (a *_2 c) *_1 (b *_2 d).$$

Zeigen Sie, dass $*_1 = *_2$ und dass $(M, *_1)$ eine abelsche Gruppe ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 1.4. Sei K ein Körper und sei

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in K \right\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Menge M ist eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation und die Teilmenge $M \subset \mathrm{GL}_2(K)$ ist eine Untergruppe.

(b) Es existiert ein Gruppenisomorphismums von $(K, +)$ auf M.

(4 Punkte)

(Bitte wenden)

Aufgabe* 1.5. Es sei M die Menge der Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die unendlich oft differenzierbar sind. Man definiere eine Multiplikation auf M, so dass die Ableitung

$$\begin{aligned} M &\to M \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

einen Gruppenhomomorphismus ist.

(2 Bonus-Punkte)

Hinweise zu Lean

Es gibt zwei Möglichkeiten, um Lean zu benutzen:

- Direkt auf dem Webbrowser, auf https://leanprover-community.github.io/lean-web-editor. Vorteil ist, dass man nichts installieren muss. Nachteil ist, dass es ein bisschen langsam läuft.
- Offline im eigenen Computer. Das geht in zwei Schritten:
  1. Lean installieren. Hinweise dazu finden Sie unter https://leanprover-community.github.io/get_started.html#regular-install.
  2. Ein neues Lean-Projekt erstellen. Hinweise dazu finden Sie unter https://leanprover-community.github.io/install/project.html#creating-a-lean-project.

Dann können Sie wie folgt anfangen:

```
import algebra

class group_hom {G G' : Type} [group G] [group G']
  (f : G → G') : Prop :=
  (hom_mul : ∀ a b, f (a * b) = f a * f b)

lemma image_of_neutral_element {G G' : Type} [group G] [group G']
  (f : G → G') [group_hom f] : f(1) = 1 :=
begin
  sorry, -- Erase sorry and replace it with your own proof!
end
```

Das ist natürlich nicht genug Information, wenn man zum ersten Mal Lean benutzt. Eine erweiterte Version des obigen Codes finden Sie auf https://home.mathematik.uni-freiburg.de/nunez/lean/azt-blatt-1.lean. Darüber hinaus gibt es auf https://leanprover-community.github.io mehrere Tutorials, denen Sie folgen können, wenn Sie Interesse haben. Bei konkreten Fragen dazu können Sie mir gerne eine E-Mail schreiben (pedro.nunez@math.uni-freiburg.de).