Aufgabe 3.1. Es sei D_4 die Gruppe der Symmetrien des Quadrates. Formal: Die Gruppe der Elemente aus $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, die die Menge $\{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}$ in sich selbst abbilden.

(a) Man gebe eine Präsentation von D_4 mit zwei Erzeugern und drei Relationen.

(b) Die *Kleinsche Vierergruppe* $V \subset \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ ist die Untergruppe, die aus zwei Spiegelungen jeweils an den Koordinatenachsen erzeugt wird. Man zeige, dass $V \triangleleft D_4$ ein Normalteiler ist.

Man kann sich ein Viereck aus Papier schneiden, dann jede Ecke irgendwie markieren und mit dem Viereck rumspielen, um diese Aufgabe zu lösen.

(8 Punkte)

Aufgabe 3.2. Es sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe.

(a) Man zeige, dass $g_1 \sim g_2 :\Leftrightarrow g_1^{-1}g_2 \in H$ eine Äquivalenzrelation auf G definiert. Sie können gerne versuchen, Ihren Beweis zu dieser Aufabe mit Lean zu überprüfen. Hinweise dazu finden Sie an der Rückseite.

(b) Man benutze Teil (a) dieser Aufgabe, um das erste Teil vom Lemma 1.11 aus der Vorlesung wieder zu beweisen: zwei Nebenklassen sind entweder gleich oder disjunkt.

(4 Punkte)

Aufgabe 3.3. Es sei G eine endliche Gruppe und $H_1 \subset H_2$ Untergruppen von G. Man zeige, dass

$$[G : H_1] = [G : H_2][H_2 : H_1].$$

(2 Punkte)

Aufgabe 3.4. Es sei G eine Gruppe und Z das Zentrum von G. Ist G/Z zyklisch, so ist G abelsch.

(4 Punkte)

(Bitte wenden)

Hinweise zu Lean

```
import group_theory.subgroup.basic
variables {G : Type} [group G] (H : subgroup G)
def Rel (H : subgroup G) (g g' : G) : Prop := g⁻¹ * g' ∈ H
lemma Rel_is_equivalence_relation : equivalence (Rel H) :=
begin
  unfold equivalence, split, -- After splitting we get two goals
  sorry, sorry, -- One sorry for each goal
end
```

Eine Relation R auf eine Menge M wird normalerweise als eine Teilmenge von $M \times M$ definiert. Aber Lean interpretiet eine Relation R auf eine Menge M als eine Abbildung $M \to M \to$ `Prop`. Die Idee ist, dass wir für $x, y \in M$ eine Proposition $x \mapsto (y \mapsto P(x, y))$ kriegen, die genau dann `true` ist, wenn $(x, y) \in R$. Mehr darüber können Sie hier lesen:

https://leanprover.github.io/logic_and_proof/relations_in_lean.html.

Bonus Hinweis: es gibt viele einfache Aussagen, die schon in Lean implementiert sind. Zum Beispiel, dass $1 \in H$ für alle Untergruppen $H \subset G$ gilt. Solche Aussagen kann man dann benutzen, aber man muss zuerst wissen, wie sie heißen. Dafür gibt es die tactic `library_search`. Diese tactic sucht Lemmas aus mathlib, die uns bei dem goal helfen können. Wenn das goal $\vdash 1 \in H$ ist, probieren Sie mal, `library_search` zu anwenden.