Aufgabe 5.1.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $r \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq r \leq n$. Sei $(i_1 \cdots i_r) \in S_n$ ein r-Zyklus und sei $\sigma \in S_n$ beliebig. Man zeige

$$\sigma \circ (i_1 \cdots i_r) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_r)).$$

(b) Man benutze Teil (a) dieser Aufgabe, um zu beweisen, dass die Kleinsche Vierergruppe ein Normalteiler in S_4 ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 5.2. Bestimmen Sie Bahnen und Standgruppen der folgenden Operationen von Gruppen. Sagen Sie noch in jedem Fall dazu, ob sie transitiv oder treu sind.

(a) $(\mathbb{R}, +) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $(t, re^{i\varphi}) \mapsto re^{i(\varphi+t)}$. Malen Sie auch ein Bild mit ein paar Bahnen.

(2 Bonus-Punkte)

(b) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(t, (x, y)) \mapsto (tx, t^{-1}y)$. Malen Sie auch ein Bild mit ein paar Bahnen.

(c) Die natürliche Operation von den Symmetrien des Viereckes auf die Ecken des Viereckes. Also $D_4 \times M \to M$ mit $(A, v) \mapsto Av$, wobei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ die Menge $\{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$ der Ecken ist.

(4 Punkte)

(d) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ mit $(P, A) \mapsto PAP^{-1}$.

(2 Bonus-Punkte)

Aufgabe 5.3. Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Körper mit p Elementen. Wir betrachten $V := \mathbb{F}_p^2$ und die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$. Sie operiert auf den Vektorraum V durch $(A, v) \mapsto Av$.

(a) Bestimmen Sie die Bahnen und aus jeder Bahn eine Standgruppe.

(b) Berechnen Sie die Ordnung der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ mit der Hilfe vom Teil (a) dieser Aufgabe.

(6 Punkte)