Aufgabe 7.1. Sei k ein Körper. Es seien $P, Q \in k[X]$ zwei Polynome.

(a) Man zeige, dass $\deg(P+Q) \leq \max\{\deg P, \deg Q\}$.

(b) Man gebe einen Beispiel von P und Q, so dass $\deg(P+Q) < \max\{\deg P, \deg Q\}$.

(c) Man zeige, dass $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.

(d) Man zeige: Wenn $PQ = 0$, dann gilt $P = 0$ oder $Q = 0$.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.2. Sei k ein Körper und $P \in k[X]$ ein Polynom vom Grad 2 oder 3. Man zeige, dass P genau dann irreduzibel ist, wenn es keine Nullstelle in k hat.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.3. Sei k ein Körper und sei $k[[X]]$ der Potenzreihenring über k, dessen Elemente der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ sind, mit dem Cauchy-Produkt als Multiplikation.

(a) Man zeige, dass $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in k[[X]]$ genau dann eine Einheit ist, wenn $a_0 \in k^*$.

(b) Jedes $f \neq 0$ lässt sich eindeutig schreiben als $f = uX^n$ mit einer Einheit $u \in k[[X]]^*$ und $n \geq 0$.

(c) Bestimmen Sie alle unzerlegbaren Elemente von $k[[X]]$.

(d) Bestimmen Sie alle Ideale von $k[[X]]$. Welche davon sind maximal?

(6 Punkte)

Aufgabe 7.4. Man beweise die Existenz der Primfaktorzerlegung in Hauptidealringe: Sei A ein Hauptidealring und $a \in A \setminus \{0\}$. Dann gibt es eine Darstellung

$$a = ua_1 \cdots a_n$$

mit einer Einheit u und unzerlegbaren Elementen $a_1, \ldots, a_n$.

(4 Punkte)

(Bitte wenden)

Aufgabe 7.5. Sei $\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ der Körper mit zwei Elementen.

(a) Wie viele irreduzible Polynome vom Grad ≤ 3 gibt es in $\mathbb{F}_2[X]$?

(b) Man schreibe eine Funktion, zum Beispiel mit Python oder Pseudocode, die als Input eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ nimmt, und als Output die Anzahl der irreduziblen Polynomen vom Grad $\leq n$ in $\mathbb{F}_2[X]$ gibt.

(6 Bonus-Punkte)