Das Blatt ist zur Bearbeitung in Präsenz in kleinen Gruppen von 2-4 Studierenden gedacht. Die Aufgaben sind grob nach Schwierigkeit sortiert. Suchen Sie sich aus, was Ihnen gefällt.

Aufgabe 1.1. Berechnen Sie mit schriftlicher Division:

(i) $714816 : 3$

(ii) $714816 : 306$

Aufgabe 1.2. Berechnen Sie die folgenden Summen:

(i) $\sum_{i=1}^{10} 1$

(ii) $\sum_{i=0}^{5} 2 \cdot 3^i$

(iii) $\sum_{i=0}^{n} (b-1)b^i$

Aufgabe 1.3. Bestimmen Sie für $a = 1, 2, \ldots, 6$ jeweils die eindeutige b Zahl in $1, \ldots, 6$, so dass
$$ab \equiv 1 \mod 7.$$

Aufgabe 1.4. Berechnen Sie die Reste $\mod 7$ der Potenzen von 3:
$$3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, \ldots, 3^{10} \ldots.$$
Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 1.5. Seien $n = 15, 711, 9023$. Stellen Sie die Zahl dar zur Basis

(i) $b = 2$

(ii) $b = 3$

(iii) $b = 12$

(iv) $b = 16$

Hinweis: Es ist üblich die Ziffern ab 10 mit den Buchstaben $A, B, \ldots$ zu bezeichnen.

(Bitte wenden)

Aufgabe 1.6. Beweisen Sie die Teilbarkeitsregel für Division durch 11: Eine Zahl $a_n \dots a_n$ im Dezimalsystem ist genau dann durch 11 teilbar, wenn $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i$ durch 11 teilbar ist.

Rechnen Sie drei Beispiele.

Aufgabe 1.7. Beweisen Sie Teilbarkeitsregel für Division durch 7: Ein Zahl $a_n \dots a_0$ im Dezimalsystem ist genau dann durch 7 teilbar, wenn $a_n \dots a_1 - 2 \cdot a_0$ durch 7 teilbar ist.

Rechnen Sie drei Beispiele.

Hinweis: Der Beweis ist schwieriger als im Fall von $3, 9, 11$.

Aufgabe 1.8. Formulieren und beweisen Sie eine Teilbarkeitsregeln für die Division durch 7 für Zahlendarstellung in der Basis 8.

Aufgabe 1.9. Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie: Für jede Zahl $a \in \mathbb{Z}$, die nicht durch p teilbar ist, gibt es eine Zahl $b \in \mathbb{Z}$, so dass

$$ab \equiv 1 \mod p.$$

Die Restklasse von b ist eindeutig bestimmt durch die Restklasse von a.

Hinweis: Beginnen Sie mit der Eindeutigkeit.

Aufgabe 1.10. (Division mit Rest)

Beweisen Sie die folgende Aussage: Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eindeutige $q \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{0, 1, 2 \dots, b-1\}$, so dass

$$a = qb + r.$$

Aufgabe 1.11. (Russische Multiplikation)

(i) Recherchieren Sie online, wie das Verfahren der sogenannten Russischen Multiplikation für die Berechnung des Produkts von zwei natürlichen Zahlen funktioniert.

(ii) Rechnen Sie drei Beispiele.

(iii) Begründen Sie das Verfahren in Termen der Darstellung der Zahlen zur Basis 2.