Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
Dr. Andreas Demleitner WS 2023/24

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Funktionentheorie“

Blatt 0 (Präsenzblatt)

Aufgabe 1:
Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$ die komplexe Konjugation.

(a) Zeigen Sie, dass f eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist. Untersuchen Sie f auf $\mathbb{C}$-Linearität.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f als $\mathbb{R}$-lineare Abbildung bzgl. der $\mathbb{R}$-Basis $(1, i)$ von $\mathbb{C}$.

(c) Wir identifizieren wie üblich $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ via

$$x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(Das ist der $\mathbb{R}$-lineare Isomorphismus, der die Basis $(1, i)$ von $\mathbb{C}$ auf die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ abbildet.)
Ist f (aufgefasst als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) differenzierbar?

Aufgabe 2:
Sei

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

eine reelle Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$. Erinnern Sie sich an den *Konvergenzradius* R dieser Potenzreihe: Er ist durch

$$R = \sup \left\{ |x - x_0| \;\middle|\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \text{ konvergiert} \right\}$$

definiert.

(a) Wiederholen Sie die wichtigsten Ergebnisse über den Konvergenzradius. Stichworte:

- Kriterien zur Berechnung von R
- *Absolute* Konvergenz von $f(x)$ für $|x - x_0| < R$, Divergenz für $|x - x_0| > R$
- Wenn f im Inneren des Konvergenzkreises eine differenzierbare Funktion definiert, was ist dann f'?
- Wie verhält es sich mit gleichmäßiger Konvergenz?
- ...

(b) Zeigen Sie: Hat f den Konvergenzradius R und ist f im Inneren des Konvergenzkreises differenzierbar, so ist f' ebenfalls eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R.

Hinweis: $\sqrt[k]{k} \to 1$ für $k \to \infty$.

Aufgabe 3:
Die Taylorreihe des Arkustangens um 0 lautet:

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Reihe.

(b) Bestimmen Sie die Taylorreihe von

$$x \mapsto \frac{1}{x^2+1}.$$

Was ist ihr Konvergenzradius? Interpretieren Sie das Ergebnis anschaulich.

Keine Abgabe – das Blatt wird in der zweiten Vorlesungswoche als Präsenzblatt besprochen.