Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
Dr. Andreas Demleitner WS 2023/24

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Funktionentheorie“

Blatt 1

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Als Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aufgefasst, wissen wir bereits aus der Vorlesung, dass die Ableitung die Gestalt

$$Df = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

besitzt. Beweisen Sie, dass es $r \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$Df = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Interpretieren Sie dies geometrisch: Da die Ableitung die lokale lineare Annäherung an eine Funktion darstellt, lernen wir, dass holomorphe Funktionen lokal wie ... aussehen.

Aufgabe 2: (3+2+4 Punkte)
Für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ definieren wir den Logarithmus als

$$\log z := \log|z| + i \arg z,$$

wobei $\arg z$ die eindeutige Zahl $\varphi \in (-\pi, \pi)$ bezeichnet, sodass $z = |z|e^{i\varphi}$. (Die Zahl φ heißt *Argument* von z.)

(a) Zeigen Sie mit den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen, dass $z \mapsto \log z$ auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ holomorph ist.

(b) Berechnen Sie die Ableitung von $z \mapsto \log z$.

(c) Zeigen Sie, dass es nicht möglich ist, log zu einer stetigen Funktion auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ fortzusetzen.

Aufgabe 3: (2+2+3 Punkte)
Gegeben sei die folgende Potenzreihe:

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot (z-1)^n$$

Sei R der Konvergenzradius der obigen Reihe. Aus der Analysis wissen wir, dass für $z \in \mathbb{R}$ mit $|z-1| < R$ die Gleichung $f(z) = \log z$ gilt.

(a) Bestimmen Sie R.

(b) Bestimmen Sie die Ableitung f'.

(c) Zeigen Sie, dass $f(z) = \log z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-1| < 1$ gilt.
Hinweis: Leiten Sie $z \mapsto f(z) - \log z$ ab.

Bonusaufgabe 4: (4 Punkte)
Wir schreiben $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $w\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ mit $w(z)^2 = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gibt.

Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis und betrachten Sie $g(z) := \frac{w(z^2)}{z}$.

Abgabedetails:

- Freitag, 27.10.2023 bis 10 Uhr.
- Das Blatt in den für Ihre Gruppe vorgesehenen Briefkasten im Keller des mathematischen Instituts einwerfen.
- Versehen Sie die Abgabe mit den Namen und der Matrikelnummer aller Personen der Gruppe.

Noch ergänzen: Zu wievielt darf abgegeben werden?