Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
Dr. Andreas Demleitner WS 2023/24

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Funktionentheorie“

Blatt 2

Aufgabe 1: (1+2+2+(2 Bonus) Punkte)
Welche der folgenden Funktionen $f_j \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind holomorph?

(a) $f_1(z) = \mathrm{Re}(z)$,

(b) $f_2(z) = f \circ g$, wobei $f, g \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph sind.

(c) $f_3(z) = \overline{f(\overline{z})}$ für eine holomorphe Funktion $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Bonus: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein (nicht-leeres) Gebiet. Finden Sie alle holomorphen Funktionen $f \colon U \to \mathbb{C}$ mit $f(U) \subset \mathbb{R}$. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Teilaufgabe (a) oben!

Aufgabe 2: (2+2+2 Punkte)
Für $v, w \in \mathbb{C}$ bezeichne $[v; w]$ die (orientierte) Strecke von v nach w. Des Weiteren sei $\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$. Berechnen Sie:

(a)
$$\int_{[i;1]} z^2 \,\mathrm{d}z,$$

(b)
$$\int_{[0;i]} z e^z \,\mathrm{d}z,$$

(c)
$$\int_{\gamma} \frac{z}{e^z - 1} \,\mathrm{d}z.$$

Aufgabe 3: (1+1+2+2 Punkte)
Seien $\gamma_1, \gamma_2 \colon [0,1] \to \mathbb{C}$ Kurven. Wir nennen $\gamma_j(0)$ den *Anfangspunkt* und $\gamma_j(1)$ den *Endpunkt* von γ_j.

(a) Gilt $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ (d.h. γ_2 beginnt an dem Punkt, an dem γ_1 endet), so definiert man die *Komposition* von γ_1 und γ_2 via

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1), & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ wieder eine Kurve ist.

(b) Wir definieren die *Umkehrung* von γ_1 durch

$$\gamma_1^- := \gamma_1(1-t).$$

Zeigen Sie, dass γ_1^- wieder eine Kurve ist.

(c) Sei f stetig. Zeigen Sie:

$$\int_{\gamma_1 \cdot \gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

und

$$\int_{\gamma_1^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(d) Sei $\gamma\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Kurve. Ferner sei $\phi\colon [a,b] \to [c,d]$ stetig differenzierbar mit $\phi(a) = c$ und $\phi(b) = d$. Zeigen Sie, dass die *Umparametrisierung* $\gamma \circ \phi$ ebenfalls eine Kurve ist, und dass für stetige Funktionen f gilt:

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma \circ \phi} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Aufgabe 4: (3 Punkte)
Ist $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $u(x,y) = x^2 - y^2$ der Realteil einer holomorphen Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$? Bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

Bonusaufgabe 5: (4 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein (nicht-leeres) Gebiet und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion ohne Nullstellen. Zeigen Sie, dass die folgenden zwei Aussagen äquivalent sind:

(1) Es existiert eine holomorphe Funktion $g\colon U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = e^{g(z)}$ für alle $z \in U$.

(2) Die Funktion f'/f besitzt eine Stammfunktion auf U.

Abgabedetails:

- Freitag, 03.11.2023 bis 10 Uhr.
- Abgabe in Gruppen bis zu zwei Personen möglich und erwünscht.
- Das Blatt in den für Ihre Gruppe vorgesehenen Briefkasten im Keller des mathematischen Instituts einwerfen.
- Versehen Sie die Abgabe mit den Namen und der Matrikelnummer aller Personen der Gruppe.