
Übungsaufgaben zur Vorlesung „Funktionentheorie“

Blatt 3

Aufgabe 1: (2+3 Punkte)

Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ sei $\partial B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$ der Rand des Kreises mit Mittelpunkt z_0 und Radius r , wie üblich entgegen dem Uhrzeigersinn parametrisiert. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a)

$$\int_{\partial B_2(1)} \frac{e^z \cos(z)}{z(z+4i)} dz,$$

(b)

$$\int_{\partial B_r(0)} (z-a)^m (z-b)^n dz,$$

wobei $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a| < r < |b|$ und $m, n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2: (2+2+2 Punkte)

(a) Schreiben Sie

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2}$$

als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt i , bestimmen Sie den Konvergenzradius und lesen Sie $f^{(2023)}(i)$ ab.

(b) Finden Sie jeweils den Konvergenzradius der Potenzreihe von

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

im Punkt a für

$$(i) a = 0, \quad (ii) a = 1, \quad (iii) a = \frac{i}{2},$$

ohne die Potenzreihe konkret zu berechnen.

(c) Sei $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Gibt es eine holomorphe Funktion $f: B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f^{(n)}(0) = n^n$$

für alle $n \geq 1$ und $f(0) = 1$? Falls ja, geben Sie diese an.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 2023$ gelte

$$|f^{(4)}(z)| \leq 42 + e^{-|z|^2}.$$

Zeigen Sie, dass f ein Polynom vom Grad ≤ 4 ist.

Bonusaufgabe 4: (5 Punkte)

Es seien $g, h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ reell stetig differenzierbar. Weiterhin gelte

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial h}{\partial z}.$$

Zeigen Sie, dass ein reell differenzierbares $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial z} = g, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = h$$

existiert.

Abgabedetails:

- Freitag, 10.11.2023 bis 10 Uhr.
- Abgabe in Gruppen bis zu zwei Personen möglich und erwünscht.
- Das Blatt in den für Ihre Gruppe vorgesehenen Briefkasten im Keller des mathematischen Instituts einwerfen.
- Versehen Sie die Abgabe mit den Namen und der Matrikelnummer aller Personen der Gruppe.