Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter WS 2023/24
Dr. Andreas Demleitner

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Funktionentheorie"

Blatt 4

Aufgabe 1: (1+1+3 Punkte)

(a) Zeigen Sie die Existenz einer holomorphen Funktion $f\colon \mathbb{C}\setminus\{-1\}\to\mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ gilt:
$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n-1}{n+1}.$$

(b) Zeigen Sie, dass das f aus (a) eindeutig ist.

(c) Geben Sie zwei verschiedene holomorphe Funktionen $f_1, f_2\colon \mathbb{C}\setminus\{0,-1\}\to\mathbb{C}$ an, die
$$f_j\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n-1}{n+1},\qquad j=1,2$$
für alle $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ erfüllen.

Aufgabe 2: (1+1+1 Punkte)
Bestimmen Sie jeweils die Laurent-Entwicklungen der folgenden holomorphen Funktionen $f\colon\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ im Kreisring $A_{0,\infty}(0)$:

(a)
$$f(z)=\exp\left(\frac{1}{z}\right),$$

(b)
$$f(z)=\frac{1}{\exp z},$$

(c)
$$f(z)=\frac{\sin(z^2)}{z^3}.$$

Aufgabe 3: (2+(2+2+2)+1 Punkte)
Sei
$$f\colon\mathbb{C}\setminus\{1,2\}\to\mathbb{C},\qquad f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}.$$

(a) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von f.

(b) Nutzen Sie jeweils (a), um die Laurent-Entwicklung von f auf dem Kreisring $A_{r,R}(0)$ zu bestimmen, wobei:

(i) $r=0$ und $R=1$,
(ii) $r=1$ und $R=2$,
(iii) $r=2$ und $R=\infty$.

(c) Besitzt f jeweils eine Stammfunktion auf $A_{r,R}(0)$ in den Fällen (i) – (iii) aus (b)? Begründen Sie.

– bitte wenden –

Bonusaufgabe 4: (4 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein nicht-leeres Gebiet, das unter komplexer Konjugation abgeschlossen ist, das heißt

$$U = \{\overline{z} \mid z \in U\}.$$

Zeigen Sie, dass für alle holomorphen Funktionen $f \colon U \to \mathbb{C}$ gilt:

$$f(U \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \iff \forall z \in U\colon \quad f(\overline{z}) = \overline{f(z)}.$$

Hinweis: In Blatt 2, Aufgabe 1 (c) wurde gezeigt, dass $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ holomorph ist.

Abgabedetails:

- Freitag, 17.11.2023 bis 10 Uhr.
- Abgabe in Gruppen bis zu zwei Personen möglich und erwünscht.
- Das Blatt in den für Ihre Gruppe vorgesehenen Briefkasten im Keller des mathematischen Instituts einwerfen.
- Versehen Sie die Abgabe mit den Namen und der Matrikelnummer aller Personen der Gruppe.