Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
Dr. Andreas Demleitner WS 2023/24

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Funktionentheorie“

Blatt 5

Aufgabe 1: (1+1+1+1 Punkte)
Geben Sie für die folgenden Funktionen jeweils an, ob in 0 eine isolierte Singularität vorliegt. Falls ja, so geben Sie den Typ an (hebbar, Polstelle n-ter Ordnung, wesentliche Singuarltität).

(a)
$$f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := \frac{\sin(z)}{z^3}(1+\exp z),$$

(b)
$$f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := \frac{1}{z}(1-\exp z),$$

(c)
$$f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := \sin\left(\frac{1-z}{z}\right),$$

(d)
$$\log\colon \mathbb{C}\setminus(-\infty,0] \to \mathbb{C}.$$

Aufgabe 2: (1+3 Punkte)
Wir betrachten die Potenzreihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}.$$

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der Reihe.

(b) Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ ein Weg mit $\gamma(0) = 0$ und dessen Endpunkt strikt außerhalb des Konvergenzkreises liegt, d.h. $|\gamma(1)| > \rho$. Zeigen Sie, dass f keine analytische Fortsetzung entlang γ besitzt.

Hinweis: Was ist $\lim\limits_{z\to\rho, z\in\mathbb{R}} f(z)$? Betrachten Sie $f(z\exp(2\pi i r))$ für $r \in \mathbb{Q}$ und $z \to \rho$ reell.

– bitte wenden –

Aufgabe 3: (2+1+1+1+2 Punkte)
Sei f eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$. Wir sagen, dass f eine *isolierte Singularität im Unendlichen* besitzt, falls eine offene Kreisscheibe $U \subset \mathbb{C}$ gibt, sodass $f|_{\mathbb{C}\setminus U}$ holomorph ist. Gilt dies, so definieren wir eine neue Funktion

$$g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass g meromorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass g in 0 eine isolierte Singularität besitzt.

Ist die Singularität von g im Nullpunkt hebbar/ein Pol n-ter Ordnung/wesentlich, so sagen wir, dass f *im Unendlichen* eine hebbare Singularität/einen Pol n-ter Ordnung/eine wesentliche Singularität hat.

(c) Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität im Unendlichen besitzt.

(d) Sei f ein Polynom des Grades $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass f eine Polstelle n-ter Ordnung im Unendlichen hat. Geben Sie die Laurent-Entwicklung dieser Polstelle an.

(e) Zeigen Sie: Ist f eine ganze Funktion, die im Unendlichen eine hebbare Singularität besitzt, so ist f konstant.

Bonusaufgabe 4: (4 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein nicht-leeres Gebiet und

$$\mathcal{M}(U) := \{f \mid f \text{ ist meromorph auf } U\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}(U)$ ein Körper ist. Gilt die Aussage auch, wenn U nicht zusammenhängend ist?

Abgabedetails:

- Freitag, 24.11.2023 bis 10 Uhr.
- Abgabe in Gruppen bis zu zwei Personen möglich und erwünscht.
- Das Blatt in den für Ihre Gruppe vorgesehenen Briefkasten im Keller des mathematischen Instituts einwerfen.
- Versehen Sie die Abgabe mit den Namen und der Matrikelnummer aller Personen der Gruppe.