Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
Dr. Andreas Demleitner WS 2023/24

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Funktionentheorie“

Blatt 6

Aufgabe 1: (3+3 Punkte)
Sei $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Wir definieren

$$f \colon U \to \mathbb{C}, \qquad r \cdot \exp(i\varphi) \mapsto \sqrt{r} \cdot \exp\left(\frac{i\varphi}{2}\right),$$

wobei $r > 0$ und $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

(a) Zeigen Sie, dass f holomorph ist mit $f(z)^2 = z$ für alle $z \in U$, und dass für $x \in U \cap \mathbb{R}$ gilt, dass $f(x) = \sqrt{x}$.

(b) Seien

$$\begin{aligned} \gamma_+ \colon [0,1] \to \mathbb{C}, &\qquad t \mapsto \exp(\pi i t), \\ \gamma_- \colon [0,1] \to \mathbb{C}, &\qquad t \mapsto \exp(-\pi i t). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie jeweils die analytischen Fortsetzungen von f entlang γ_+ und γ_-. Verwenden Sie hierbei nicht die Resultate des Unterkapitels „Logarithmus und Wurzeln“ aus dem Skript.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum und $x_0 \in X$ so, dass jeder geschlossene Weg in X mit Anfangs- und Endpunkt x_0 nullhomotop ist, das heißt, X ist einfach zusammenhängend.
Sei $\gamma \colon [0,1] \to X$ ein Weg. Zeigen Sie, dass γ nullhomotop ist. Folgern Sie, dass einfacher Zusammenhang unabhängig von der Wahl von x_0 ist.

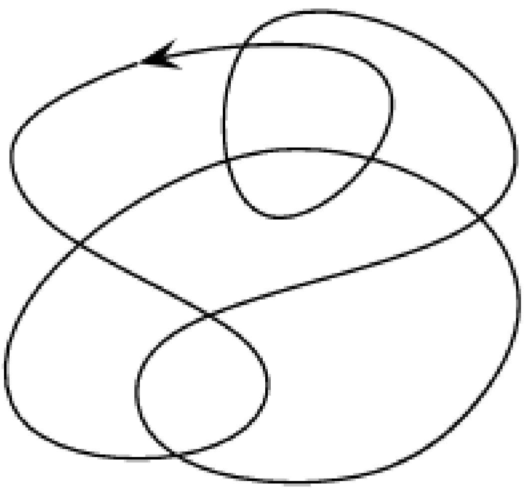
Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0, z_1 \in U$. Man sagt, dass z_0 und z_1 in derselben *Wegzusammenhangskomponente* von U liegen, wenn es einen Weg $\alpha \colon [0,1] \to U$ mit $\alpha(0) = z_0$ und $\alpha(1) = z_1$ gibt.
Sei nun $\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg und $U := \mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$. Für $z_0 \in U$ sei

$$n(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} \, \mathrm{d}z$$

die Umlaufzahl von γ um z_0. Zeigen Sie, dass $n(z_1) = n(z_0)$, wenn z_0 und z_1 in derselben Wegzusammenhangskomponente von U liegen.

– bitte wenden –

Aufgabe 4: (3 Punkte)
Das Bild des Weges γ sei wie folgt gegeben:



Bestimmen Sie die Umlaufzahl von γ für sämtliche (Weg-)Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Bild}(\gamma)$. Dabei soll angenommen werden, dass γ den gezeichneten Weg genau einmal in der angegebenen Richtung ohne Knicke (d.h. ohne an Kreuzungen abzubiegen) durchläuft. (Bei dieser Teilaufgabe geht es lediglich um die Intuition. Sie müssen keinen Beweis oder irgendwelche Rechnungen anfertigen.)

Abgabedetails:

- Freitag, 01.12.2023 bis 10 Uhr.
- Abgabe in Gruppen bis zu zwei Personen möglich und erwünscht.
- Das Blatt in den für Ihre Gruppe vorgesehenen Briefkasten im Keller des mathematischen Instituts einwerfen.
- Versehen Sie die Abgabe mit den Namen und der Matrikelnummer aller Personen der Gruppe.