Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
Dr. Andreas Demleitner WS 2023/24

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Funktionentheorie“

Blatt 8

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Folgern Sie den Satz über die Gebietstreue (Satz 3.11) aus dem Satz über die Blätterzahl (Korollar 5.17).

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Wir definieren Kurven $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c \colon [0,1] \to \mathbb{C}$ durch

$$\gamma_a(t) := \exp(2\pi i t), \qquad \gamma_b(t) := -5\exp(8\pi i t), \qquad \gamma_c(t) := 2 - \exp(2\pi i t).$$

Fertigen Sie eine Skizze an und berechnen Sie die Umlaufzahl des Zykels

$$\gamma_a - 2\gamma_b + 3\gamma_c$$

jeweils um

(i) $z = 0$,

(ii) $z = 2$.

Aufgabe 3: (1 Punkt)
Geben Sie ein Beispiel für zwei Zykeln in der Menge $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ an, die nicht homolog sind.

Aufgabe 4: (1+5 Punkte)

(a) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f_1, f_2 \colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei. Zeigen Sie:

$$\frac{(f_1 f_2)'}{f_1 f_2} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2}.$$

Wir nennen f_j'/f_j die *logarithmische Ableitung* von f_j.

(b) Seien $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und $U \subset \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_r\}$ ein Gebiet. Seien außerdem $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}$ und

$$f \colon U \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := (z - z_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (z - z_r)^{k_r}.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(1) Die holomorphe Funktion f besitzt einen Logarithmus auf U (vgl. Blatt 7, Aufgabe 4).

(2) Für alle geschlossenen Kurven γ in U gilt

$$k_1 \cdot n_\gamma(z_1) + \ldots + k_r \cdot n_\gamma(z_r) = 0,$$

wobei $n_\gamma(z_j)$ die Umlaufzahl von γ um z_j bezeichnet.

– bitte wenden –

Abgabedetails:

- Freitag, 15.12.2023 bis 10 Uhr.
- Abgabe in Gruppen bis zu zwei Personen möglich und erwünscht.
- Das Blatt in den für Ihre Gruppe vorgesehenen Briefkasten im Keller des mathematischen Instituts einwerfen.
- Versehen Sie die Abgabe mit den Namen und der Matrikelnummer aller Personen der Gruppe.