Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
Dr. Andreas Demleitner WS 2023/24

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Funktionentheorie“

Blatt 9

Aufgabe 1: (2+2+2 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $a \in U$ und $f\colon U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Aus der Vorlesung wissen Sie bereits, dass

$$\operatorname{res}_a(f) = \lim_{z \to a} ((z-a)f(z)),$$

falls f in a einen Pol erster Ordnung hat. Natürlich kommt man nicht drum herum, auch Residuen von Funktionen zu berechnen, die nicht notwendig einen Pol erster Ordnung haben. In dieser Aufgabe wollen wir deshalb drei weitere Berechnungsmethoden für Residuen beweisen.

(a) Seien $g, h\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$ und

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}.$$

Zeigen Sie:

$$\operatorname{res}_a(f) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

(b) Seien $g\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph, $k \geq 2$ und

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}.$$

Zeigen Sie:

$$\operatorname{res}_a(f) = \frac{1}{(k-1)!} \cdot g^{(k-1)}(a).$$

(c) Zeigen Sie: Falls f eine Stammfunktion auf $U \setminus \{a\}$ besitzt, so gilt $\operatorname{res}_a(f) = 0$.

Aufgabe 2: (1+2+1+2+1 Punkte)
Gegeben sei die durch $f(z) = (z^2 + 4\pi^2)\sin(z)$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.

(b) Bestimmen Sie die Residuen von $1/f$ in $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Fertigen Sie eine Skizze der Menge

$$M = \{t - i\cos(t) \mid t \in [-\pi, \pi]\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 1,\ |z - i| = \pi\}$$

an. Tragen Sie diejenigen isolierten Singularitäten von $1/f$ in die Skizze ein, die in dem von M eingeschlossenen Bereich liegen.

(d) Geben Sie explizit einen Zykel γ an, sodass $\operatorname{Bild}(\gamma) = M$ und geben Sie die Umlaufzahl von γ für alle Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus M$ an.

(e) Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{f(z)}$$

für Ihren Weg γ aus (d).

– bitte wenden –

Aufgabe 3: (2+2 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden beiden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

(a)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x,$$

(b)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \qquad \text{für} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Abgabedetails:

- Freitag, 22.12.2023 bis 10 Uhr.
- Abgabe in Gruppen bis zu zwei Personen möglich und erwünscht.
- Das Blatt in den für Ihre Gruppe vorgesehenen Briefkasten im Keller des mathematischen Instituts einwerfen.
- Versehen Sie die Abgabe mit den Namen und der Matrikelnummer aller Personen der Gruppe.