Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
Dr. Andreas Demleitner

WS 2023/24

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Funktionentheorie“

Blatt 10

Aufgabe 1: (5+2 Punkte)

(a) Die in der Vorlesung diskutierte Version des Satzes von Rouché hat den Nachteil, dass die darin vorkommende Bedingung “$|f(z)-g(z)|<|f(z)|$ für alle $|z-z_0|=R$” nicht symmetrisch in f und g ist. Zeigen Sie die folgende symmetrische Variante des Satzes von Rouché:
Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und $K \subset U$ eine abgeschlossene Kreisscheibe. Es gelte:

$$\forall z \in \partial K\colon \quad |f(z)-g(z)| < |f(z)| + |g(z)|.$$

Dann haben f und g dieselbe Anzahl an Nullstellen in K.

(b) Folgern Sie den in der Vorlesung diskutierten Satz von Rouché aus der symmetrischen Version in Teilaufgabe (a).

Aufgabe 2: (3+2 Punkte)
Es sei

$$P(z) = 2024z^{2024} + \sum_{k=0}^{2023} a_k z^k,$$

wobei $a_k \in \mathbb{C}$, $|a_k| < 1$ für alle $k = 0, \dots, 2023$ gelte.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von P in der offenen Einheitskreisscheibe $B_1(0)$ (mit Vielfachheiten gezählt).

(b) Zeigen Sie

$$\exp\left(\frac{1}{253}\int_{\partial B_1(0)} \frac{P'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}z\right) = 1\,.$$

Hierbei bezeichnet $\partial B_1(0)$ die einmal im mathematisch positiven Sinne durchlaufene Einheitskreislinie.

– bitte wenden –

Aufgabe 3: (2+2+2 Punkte)
Im Residuensatz hat man

- ein Gebiet G,
- eine Funktion f mit isolierten Singularitäten in G, das heißt es gibt eine abgeschlossene Teilmenge $S \subset G$, sodass f auf $G \setminus S$ holomorph ist,
- und einen Zykel γ in $G \setminus S$, der keinen Punkt außerhalb von G umläuft.

Überprüfen Sie die Voraussetzungen des Residuensatzes in den folgenden Beispielen:

(a) $G = B_1(0) \setminus \{0\}$, $S = \left\{\frac{1}{k\pi} \mid k \in \mathbb{N}\right\}$,

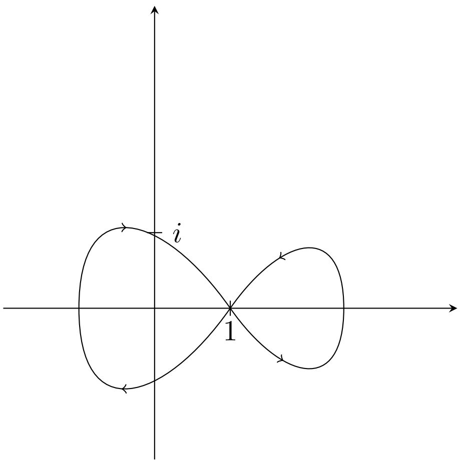
$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

und γ die im mathematisch positiven Sinne durchlaufene Einheitskreislinie.

(b) $G = B_2(0)$, $S = \{-1, 0, 1\}$,

$$f(z) = \frac{1}{z^3 \sin\left(\frac{z}{\pi}\right)}$$

und γ der folgende Weg:



(c) $G = \mathbb{C}$, $S = \{i, 2i\}$,

$$f(z) = \frac{\exp(z)}{(z-i)^3(z-2i)^4}$$

und $\gamma = \gamma_a - 4\gamma_b + \gamma_c$, wobei

$$\begin{aligned}
\gamma_a &\colon [0,1] \to \mathbb{C}, & \gamma_a(t) &= 3 - 6t, \\
\gamma_b &\colon [0,1] \to \mathbb{C}, & \gamma_b(t) &= 5\exp(2\pi i t), \\
\gamma_c &\colon [0,1] \to \mathbb{C}, & \gamma_c(t) &= 3\exp(\pi i t).
\end{aligned}$$

Abgabedetails:

- Freitag, 12.01.2024 bis 10 Uhr.
- Abgabe in Gruppen bis zu zwei Personen möglich und erwünscht.
- Das Blatt in den für Ihre Gruppe vorgesehenen Briefkasten im Keller des mathematischen Instituts einwerfen.
- Versehen Sie die Abgabe mit den Namen und der Matrikelnummer aller Personen der Gruppe.