Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
Dr. Andreas Demleitner WS 2023/24

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Funktionentheorie“

Weihnachtsblatt

Die Aufgaben auf diesem Zettel sind zum Üben während der Weihnachtspause gedacht, sie dienen der freiwilligen Selbstkontrolle. Die Aufgaben müssen nicht bearbeitet oder abgegeben werden – jedoch können Sie durch diesen Zettel maximal 16 Bonuspunkte erhalten.

Damit unsere Tutoren nicht überlastet werden:

- Bitte das Blatt nur abgeben, wenn Sie Feedback zu Ihrer Lösung oder Punkte benötigen. (Wenn Sie davon nicht betroffen sind und dennoch an einer bestimmten Aufgabe interessiert sind, sprechen Sie Andreas Demleitner an.)
- Unsere Tutoren korrigieren nicht alle abgegebenen Aufgaben, sondern nur solange, bis Sie maximal 16 Punkte erreicht haben.

Bemerkung zum Schwierigkeitsgrad:

- Der erste Abschnitt („Was alle wissen sollten“) enthält größtenteils Reproduktionsaufgaben.
- Der zweite Abschnitt („Was alle können sollten“) enthält leichte Anwendungen von Ergebnissen der Vorlesungen.
- Im dritten Abschnitt finden Sie eine Reihe „normaler“ Aufgaben.
- Am Schluss findet sich eine Sammlung von anspruchsvolleren Aufgaben, die teilweise über den Stoff und die Anforderungen der Vorlesung hinausgehen.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und ein gesundes, erfolgreiches neues Jahr!

Was alle wissen sollten

Bei den Aufgaben dieser Kategorie – die unbepunktet sind – handelt es sich größtenteils um Reproduktionsaufgaben. Die Bearbeitung wird empfohlen.

Aufgabe 1 :
Alle Kurztests sind nun nochmals für die Bearbeitung freigeschaltet. Bearbeiten Sie die Kurztests noch einmal.

Aufgabe 2 :
Formulieren Sie die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen für eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Aufgabe 3 :
Wie ist das Wegintegral einer stetigen Funktion über einen stetig differenzierbaren Weg definiert?

Aufgabe 4 :
Formulieren Sie die Cauchy-Integralformel. Drücken Sie die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung einer holomorphen Funktion mit Hilfe der Cauchy-Integralformel aus.

– bitte wenden –

Aufgabe 5 :
Sei f eine ganze Funktion und $a \in \mathbb{C}$. Sei $r \in \mathbb{R}$ so, dass $r \neq |a|$. Geben Sie den Wert des Integrals

$$\int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z-a} \, \mathrm{d}z$$

in Abhängigkeit von a an. In Ihrer finalen Antwort sollten keine Umlaufzahlen mehr vorkommen.

Aufgabe 6 :
Formulieren Sie den Identitätssatz.

Aufgabe 7 :
Definieren Sie die Begriffe „isolierte Singularität“, „hebbare Singularität“, „Polstelle n-ter Ordnung“ sowie „wesentliche Singularität“. Erklären Sie außerdem den Zusammenhang zwischen der Laurent-Entwicklung einer Funktion und isolierten Singularitäten.

Aufgabe 8 :
Definieren Sie die Umlaufzahl eines Zykels.

Aufgabe 9 :
Formulieren Sie den Residuensatz und erklären Sie, warum er eine Verallgemeinerung der Umlaufzahlversion des Integralsatzes sowie der Cauchy-Integralformel darstellt.

Was alle können sollten

Aufgabe 10 : (1 Punkt)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen: Ist $z \mapsto \overline{f(z)}$ holomorph, so ist f konstant.

Aufgabe 11 : (2 Punkt)
Bestimmen Sie alle Punkte, in denen die Abbildung $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$ komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 12 : (1+1+2 Punkte)
Geben Sie – mit einer kurzen Begründung – jeweils den Konvergenzradius der Potenzreihe von f um z_0 an, ohne die Potenzreihe konkret zu berechnen.

(a) $f(z) = \exp(\sin(z^2 + 2024z)) + 1$ und $z_0 = 42$.

(b) $f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}$ und $z_0 = \frac{1}{3}$.

(c) $f(z) = \exp\left(\frac{\sin z}{z}\right)$ und $z_0 = 1$.

Aufgabe 13 : (1 Punkt)
Geben Sie die Laurent-Entwicklung von

$$f(z) := \sin\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{1-z}$$

auf $A_{0,1}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ an.

Aufgabe 14 : (1 Punkt)
Bestimmen Sie $\sup\{|\sin(z)| \mid z \in \mathbb{C}\}$, indem Sie einen geeigneten Satz aus der Funktionentheorie anwenden, also insbesondere ohne die Funktionswerte von $z \mapsto |\sin(z)|$ zu betrachten.

Aufgabe 15 : (1 Punkt)
Sei γ der Weg, der das Rechteck mit den Eckpunkten $-4-i, 5-i, 5+2i, -4+2i$ in der angegebenen Reihenfolge genau einmal durchläuft. Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{z^2+1}{z\cdot(z+5)\cdot(z-i)^2}\,\mathrm{d}z.$$

Aufgabe 16 : (1 Punkt)
Ist die Funktion

$$z \mapsto \sin\left(\frac{1}{z^3}\right)$$

meromorph auf $\mathbb{C}$? Begründen Sie.

Aufgabe 17 : (2 Punkte)
Sei $f(z) := \frac{1}{z}$. Bestimmen Sie $\mathrm{res}_a(f)$ für alle $a \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 18 : (2 Punkte)
Gegeben sei der Zykel

$$Z := \partial B_1(0) - \partial B_1(i),$$

wobei Kreiswege wie üblich entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen werden. Bestimmen Sie die Umlaufzahl von Z um alle Punkte, die nicht von Z getroffen werden.

Normale Aufgaben

Aufgabe 19 : (2 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2\overline{z}$. Bestimmen Sie alle Punkte, in denen f komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 20 : (2 Punkte)
Sei $D \subset \mathbb{C}$ das offene Dreiecksgebiet, das durch die Eckpunkte 0, 1 und $1+i$ aufgespannt wird. Sei ferner γ ein Weg, der den Rand des Dreiecks D genau einmal gegen den Uhrzeigersinn durchläuft. Berechnen Sie

$$\int_\gamma |z|^2\,\mathrm{d}z.$$

Aufgabe 21 : (3 Punkte)
Finden Sie die Reihenentwicklung der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

um i. Was ist der Konvergenzradius der Reihe?

Aufgabe 22 : (2+2+2 Punkte)
Gegeben sei die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\geq 0}$, d.h. $f_0 = f_1 = 1$ und

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad \text{für} \qquad n \geq 2.$$

Sei

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

und $R \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ der Konvergenzradius der obigen Potenzreihe.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Quotientenkriteriums, dass $R \geq \frac{1}{2}$.

– bitte wenden –

(b) Zeigen Sie, dass $(1 - z - z^2)F(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$.

(c) Bestimmen Sie R.

Aufgabe 23 : (je 1 Punkt)
Berechnen Sie $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ für die angegebenen Funktionen f und Wege $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$:

(a) $f(z) = z^2$ und $\gamma(t) = r\exp(\pi i t)$ mit $r > 0$.

(b) $f(z) = \overline{z}$ und $\gamma(t) = \frac{1}{t+1} + it^2$.

(c) $f(z) = \sin(\mathrm{Re}(z))$ und $\gamma(t) = t + i\sin(t)$.

(d) $f(z) = z^{-n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\gamma(t) = \exp(2\pi i t)$.

Aufgabe 24 : (3 Punkte)
Bestimmen Sie Lage und Typ aller isolierter Singularitäten der Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{z}{z-2}\exp\left(\sin\left(\frac{z-1}{z^2-z}\right)\right),$$

wobei $G \subset \mathbb{C}$ den maximal größten Definitionsbereich der Funktion bezeichnet.

Aufgabe 25 : (2+2+2+2+2 Punkte)
Entscheiden Sie, ob es Funktionen f mit den jeweils angegebenen Eigenschaften gibt. Geben Sie im Falle der Existenz ein Beispiel an und begründen Sie kurz, warum Ihr Beispiel die geforderten Eigenschaften besitzt. Zeigen Sie andernfalls, dass es kein solches Beispiel geben kann.

(a) Eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| = 2$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

(b) Eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = \pi^{42}$ und $|f(z)| = 2$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$. (*Hinweis:* Satz 3.12)

(c) Eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit einer Polstelle bei $z = 0$ so, dass f keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ besitzt.

(d) Eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit einer wesentlichen Singularität bei $z = 0$ so, dass f keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ besitzt.

(e) Eine surjektive holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to B_1(0)$.

Aufgabe 26 : (4 Punkte)
Eine Funktion f auf $\mathbb{C}$ heißt *doppelt periodisch*, wenn es $\mathbb{R}$-linear unabhängige $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2) \qquad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie: Ist f eine ganze doppelt periodische Funktion, so ist f konstant.

Aufgabe 27 : (3 Punkte)
Es seien $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $g \circ f = 0$. Zeigen Sie: $g = 0$ oder f ist konstant.

Aufgabe 28 : (2+2+2 Punkte)
Beweisen Sie mit Hilfe des Identitätssatzes oder widerlegen Sie:

(a) $\sin(z + \pi) = -\sin(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) $\cos(z) = \mathrm{Re}(\exp(iz))$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(c) $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

Sie dürfen hierbei dafür ausgehen, dass (a) und (b) jeweils für alle $z \in \mathbb{R}$ und (c) für alle $z, w \in \mathbb{R}$ gelten.

Aufgabe 29 : (3+3 Punkte)
Bestimmen Sie für jede der Singularitäten von f in $\mathbb{C}$ den Typ (bei Polen inkl. Polordnung) und berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial B_4(0)} f(z)\,\mathrm{d}z$$

für

(a) $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{\exp(z) - \exp(\pi)}$, (b) $f(z) = \sin\left(\exp\left(\dfrac{1}{z}\right)\right)$.

Aufgabe 30 : (3+3 Punkte)
Es sei $f\colon \mathbb{C} \setminus \{i, -i, 0\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{(z+i)^2}{(z^2+1)^2} + \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right).$$

(a) Bestimmen Sie für jede der isolierten Singularitäten von f den Typ und geben Sie den Hauptteil der Laurentreihenentwicklung in einer punktierten Umgebung für jede der isolierten Singularitäten an.

(b) Zeigen Sie, dass f eine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{i, -i, 0\}$ besitzt.

Aufgabe 31 : (3+3 Punkte)
Entwickeln Sie f jeweils in eine Laurent-Reihe auf $A_{0,1}(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-1| < 1\}$:

(a)

$$f(z) = \frac{1}{(\log z)^2},$$

wobei log den Hauptzweig des Logarithmus bezeichnet.

(b)

$$f(z) = \frac{1}{1 - z^{1/2}},$$

wobei $z^{1/2}$ durch den Hauptzweig des Logarithmus definiert sei.

Aufgabe 32 : (3 Punkte)
Für gegebene $n, k \in \mathbb{Z}$ und $0 < r \neq 1$ bestimme man die Umlaufzahl der durch

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \qquad \gamma(t) := \exp(int) + r\exp(ikt)$$

definierten Kurve um den Nullpunkt.

Hinweis: Die Umlaufzahl ist homotopieinvariant (auch für Homotopie geschlossener Wege).

Aufgabe 33 : (2+3+2+3 Punkte)
Sei $G := B_{2\pi}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\pi\}$. Auf G betrachten wir die meromorphe Funktion

$$f(z) := \frac{\exp(z) - 1}{\sin(z)}.$$

(a) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten von f in G und deren Typ (bei Polen inkl. der Polordnung).

(b) Berechnen Sie die Residuen von f in allen Singularitäten.

– bitte wenden –

(c) Zeigen Sie, dass f keine Stammfunktion auf G besitzt.

(d) Finden Sie $c_1, c_2, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, sodass

$$g(z) := f(z) + c_1 \frac{1}{z - a_1} + c_2 \frac{1}{z - a_2}$$

eine Stammfunktion auf G besitzt.

Aufgabe 34 : (2+5 Punkte) Es sei $0 < a < 1$. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{\exp(ax)}{1 + \exp(x)}$$

ist uneigentlich integrierbar.

(b) Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ax)}{1 + \exp(x)} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$$

Integrieren Sie dazu eine geeignete holomorphe Funktion über den Rand der Rechtecke mit den Ecken $-R, R, R + 2\pi i, -R + 2\pi i$.

Aufgabe 35 : (2+5 Punkte) Sei $\omega \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \exp(-x^2)\cos(2\omega x)$$

ist uneigentlich integrierbar. Sie dürfen dabei verwenden, dass $x \mapsto \exp(-x^2)$ uneigentlich integrierbar ist.

(b) Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\cos(2\omega x) \, \mathrm{d}x = \exp(-\omega^2)\sqrt{\pi}.$$

Hinweise:

- Es darf $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ verwendet werden.
- Betrachten Sie
$$\int_{\gamma_R} e^{-z^2} \, \mathrm{d}z,$$
wobei γ_R der Weg ist, der das Rechteck mit den Eckpunkten $-R,\ R,\ R + i\omega,\ -R + i\omega$ in der angegebenen Reihenfolge einmal durchläuft.

Aufgabe 36 : (3+3 Punkte)
Es sei $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|h(z)| \leq 2$ für alle $|z| = 2$ und $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := h(z)^3 + 4z^2 - z + 1.$$

(a) Bestimmen Sie die Zahl der Nullstellen (gezählt mit Vielfachheiten) der Funktion f auf $B_2(0)$.

(b) Sei nun konkret

$$h(z) := \frac{z}{2}.$$

Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von f auf $A_{1,2}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

Aufgabe 37 : (4 Punkte)
Es sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Rouché, dass die Gleichung

$$ze^{a-z} = 1$$

genau eine Lösung $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ besitzt. Zeigen Sie ferner, dass diese Lösung reell und positiv ist.

Weiterführende Aufgaben

Hier sind Aufgaben für diejenigen, die sich bei den vorherigen Aufgaben gelangweilt haben. Wir möchten betonen, dass die Aufgaben teilweise über den Stoff und die Anforderungen der Vorlesung hinausgehen.

Aufgabe 38 : (6 Punkte)
Sei $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\mathrm{Re}(f(z)) > 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.
Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, warum die Singularität von f bei $z = 0$ hebbar ist.

Aufgabe 39 : (5 Punkte)
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ stetig. Sei $L \subset \mathbb{C}$ eine Gerade. Zeigen Sie: Ist f holomorph auf $G \setminus L$, so kann f holomorph nach G fortgesetzt werden (d.h. es existiert eine holomorphe Funktion $g\colon G \to \mathbb{C}$ mit $g|_{G\setminus L} = f$).

Aufgabe 40 : (5 Punkte)
Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1) \in (0,\infty)$. Für $k \in \mathbb{N}$ werde die Wahl eines Wertes $\gamma(t)^{1/k}$ für die k-te Wurzel von $\gamma(t)$ durch $\gamma(0)^{1/k} > 0$ und die Stetigkeit von $\gamma^{1/k}\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ festgelegt. Berechnen Sie

$$\int_\gamma z^{1/k}\,\mathrm{d}z$$

in Abhängigkeit von k, $\gamma(0)$ und der Umlaufzahl $n_\gamma(0)$.

Aufgabe 41 : (4 Punkte)
Sei $B_1(0) \subset \mathbb{C}$ die Einheitskreisscheibe und

$$\overline{B_1(0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$$

ihr Abschluss. Finden Sie ein Beispiel einer Funktion $f\colon \overline{B_1(0)} \to \mathbb{C}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) f ist stetig,

(2) $f|_{B_1(0)}$ ist holomorph,

(3) ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, das $\overline{B_1(0)}$ enthält, so besitzt f keine analytische Fortsetzung nach G.

– bitte wenden –

Abgabedetails: **Hinweise zur Abgabe am Beginn des Blattes beachten!**

- Freitag, 12.01.2024 bis 10 Uhr.
- Abgabe in Gruppen bis zu zwei Personen möglich und erwünscht.
- Das Blatt in den für Ihre Gruppe vorgesehenen Briefkasten im Keller des mathematischen Instituts einwerfen.
- Versehen Sie die Abgabe mit den Namen und der Matrikelnummer aller Personen der Gruppe.