Prof. Annette Huber-Klawitter
Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Christoph Brackenhofer

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2024/25

Semi-algebraische Geometrie

Präsenzblatt zur Besprechung im Tutorat am 23.10.
Dieses Blatt wird nicht benotet.

Aufgabe 1.

Gegeben einen angeordneten Körper $(K, \leq)$, zeigen Sie, dass $0 \leq 1$ und dass $x^2 \geq 0$ für alle x aus K.

Aufgabe 2.

Wieviele Ordnungen $\leq$ gibt es auf einen Körper K der Charakteristik p derart, dass $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper ist?

Aufgabe 3.

Ein kommutativer Ring R heißt *noethersch*, wenn jede unendliche aufsteigende Kette von Idealen

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$$

stationär wird (d.h. es gibt ein n in $\mathbb{N}$ derart, dass $I_n = I_{n+k}$ für alle $k \geq 0$).

(i) Ist $\mathbb{Z}$ ein noetherscher Ring?

(ii) Zeigen Sie, dass jedes Ideal eines noetherschen Rings endlich erzeugt ist.

(iii) Sei $f\colon A \to B$ ein surjektiver Ringhomomorphismus und A noethersch. Zeigen Sie, dass dann auch B noethersch ist.

Zur Erinnerung: Der *Hilbertscher Basissatz* besagt, dass für jeden noetherschen Ring R der Polynomring $R[T]$ auch noethersch ist.

Aufgabe 4.

Bestimmen Sie, ob die folgenden Mengen semi-algebraisch sind:

(a) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists n \in \mathbb{N} : \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\}$

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = e^x\}$

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall z \in \mathbb{R}, |x - y - z| \leq |z|\}$

Aufgabe 5.

Muss eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ semi-algebraisch sein, wenn beide Projektionen auf die erste und zweite Koordinate semi-algebraische Mengen sind?

Bitte bemühen Sie sich, dieses Blatt schon vor dem Tutorat am 23.10. zu bearbeiten!