

## Semi-algebraische Geometrie

### Blatt 1

Abgabe: 25.10. 14:00 Uhr

#### Aufgabe 1 (2 Punkte).

Zeigen Sie, dass das kartesische Produkt  $A \times B$  zweier semi-algebraischen Mengen  $A \subset \mathbb{R}^m$  und  $B \subset \mathbb{R}^n$  wiederum semi-algebraisch ist.

#### Aufgabe 2 (8 Punkte).

Gegeben einen angeordneten Körper  $K$ , betrachten wir die Menge  $K[[T^{\mathbb{Q}}]]$  der formalen Reihen

$$f = \sum_{q \in \mathbb{Q}} a_q T^q,$$

mit  $a_q$  in  $K$  derart, dass jede nichtleere Teilmenge von  $\{q \in \mathbb{Q} \mid a_q \neq 0\}$  ein kleinstes Element besitzt.

Die Addition und Multiplikation werden auf  $K[[T^{\mathbb{Q}}]]$  durch

$$f + g = \sum_{q \in \mathbb{Q}} (a_q + b_q) T^q \quad \text{und} \quad f \cdot g = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \sum_{q' + q'' = q} a_{q'} b_{q''} T^q,$$

definiert, falls

$$f = \sum_{q \in \mathbb{Q}} a_q T^q \quad \text{und} \quad g = \sum_{q \in \mathbb{Q}} b_q T^q.$$

Zudem definieren wir eine Ordnung auf  $K[[T^{\mathbb{Q}}]]$ , indem wir auf der Menge der Koeffizienten die lexikografische Ordnung verwenden, d.h.

$$f > g \iff \text{es gibt ein } \tilde{q} \text{ in } \mathbb{Q} \text{ derart, dass } a_{\tilde{q}} > b_{\tilde{q}} \text{ und } a_q = b_q \text{ für alle } q < \tilde{q}.$$

- (i) Zeigen Sie, dass  $K[[T^{\mathbb{Q}}]]$  ein angeordneter Körper ist.
- (ii) Für  $K = \mathbb{R}$ , zeigen Sie, dass jedes positive Element  $f$  aus  $\mathbb{R}[[T^{\mathbb{Q}}]]$  ein Quadrat  $g$  in  $\mathbb{R}[[T^{\mathbb{Q}}]]$  besitzt, d.h.  $g^2 = f$ .

#### Aufgabe 3 (5 Punkte).

Bestimmen Sie die Normalformen der folgenden semi-algebraischen Mengen:

- (i)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (2 \geq xyz \geq -2) \wedge (x^2 + y^2 \leq 1) \wedge ((z < -1) \vee (z > 1))\}$
- (ii)  $(U(-xy))^c \cap ((U(x) \cap U(y))^c) \cap ((U(-x) \cap U(-y))^c) \subset \mathbb{R}^2$

#### Aufgabe 4 (5 Punkte).

Bestimmen Sie den Abschluss der semi-algebraischen Menge

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - x^2 - y^2 > 0\}$$

und fertigen Sie eine Skizze davon an.

Vergleichen Sie  $A$  mit der Menge  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - x^2 - y^2 \geq 0\}$ .