Prof. Annette Huber-Klawitter
Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Christoph Brackenhofer

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2024/25

Semi-algebraische Geometrie
Blatt 10
Abgabe: 10.01.2025 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**

Sei A ein kommutativer Ring mit Eins. Ein Ideal $I \subset A$ heißt *Radikalideal*, falls für jedes f aus A gilt: Wenn f^n in I für ein $n \geq 1$ aus $\mathbb{N}$ liegt, dann ist f in I enthalten, oder äquivalent dazu (Begründen Sie die Äquivalenz!), wenn A/I keine nilpotenten Elemente ungleich Null enthält.

(a) Sei I das von $XY - Y^2$ im $K[X, Y]$ erzeugte Ideal. Zeigen Sie, dass $(X + I)$ kein Radikalideal von $K[X, Y]/I$ ist.

(b) Gegeben ein Ideal I von A, zeigen Sie, dass $\sqrt{I} = \{f \in A \mid f^n \in I \text{ für ein } n \geq 1\}$ das kleinste Radikalideal ist, das I enthält.

(c) Gegeben ein Radikalideal I aus A sowie Elemente f und g aus A mit fg in I, zeigen Sie, dass $I = \sqrt{I + (f)} \cap \sqrt{I + (g)}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**

Seien k eine natürliche Zahl und E eine semi-algebraische Äquivalenzrelation auf einer semi-algebraischen Menge $X \subset R^n$ derart, dass es unendliche viele Äquivalenzklassen bezüglich E der Dimension k gibt. Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass $\dim(X) > k$.

(i) Begründen Sie folgendes: Wenn $\dim(X) \not> k$, so ist $\dim(X) = k$, und wir können annehmen, dass X eine Zelle ist.

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe der Bemerkung nach dem Lemma 3.32 aus dem Skript, dass es eine Projektion $\pi \colon R^n \to R^k$ so gibt, dass von E induzierte Äquivalenzrelation E_1 auf $\pi(X)$ unendlich viele Äquivalenzklassen mit nicht-leeren Inneren besitzt.

(iii) Folgern Sie aus der Aufgabe 4 auf Blatt 9, dass $\dim(X) > k$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**

Sei $G \subset R^n$ eine semi-algebraische Menge mit einer Gruppenstruktur derart, dass die durch $(x, y) \mapsto x \cdot y^{-1}$ definierte Abbildung $G \times G \to G$ semi-algebraisch ist. Betrachte eine semi-algebraische Teilmenge H von G derart, dass H eine Untergruppe von G ist.

Folgern Sie aus der Aufgabe 2, dass $\dim(G) = \dim(H)$ genau dann, wenn der Index $[G : H]$ endlich ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.**

Wir betrachten eine semi-algebraische Gruppe $G \subset R^n$ so wie in der Aufgabe 3. Des Weiteren nehmen wir an, dass die Abbildung $(x, y) \mapsto x \cdot y^{-1}$ stetig ist, und dass es ein Element g aus G mit Zentralisator $C_G(g) = \{h \in G \mid h \cdot g = g \cdot h\}$ sowie eine offene Teilmenge V von G derart gibt, dass $V \cdot V^{-1} \cap (C_G(g) \setminus \{1_G\}) = \emptyset$.

Zeigen Sie, dass die semi-algebraische Menge $g^G = \{h^{-1} \cdot g \cdot h\}_{h \in G}$ ein nicht-leeres Inneres in G hat. Schliessen Sie daraus, dass die Konjugationsklasse g^G offen in G ist.

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach 47 im dritten Stock des mathematischen Instituts.