Prof. Annette Huber-Klawitter
Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Christoph Brackenhofer

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2024/25

Semi-algebraische Geometrie
Blatt 12
Abgabe: 24.01.2025 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**
Sei $F\colon A \to F(A)$ eine semi-algebraische Abbildung und $k \geq 1$ eine natürliche Zahl derart, dass $k = |F^{-1}(b)|$ für alle b aus $F(A)$.

(i) Begründen Sie, dass $\dim(A) = \dim(\Gamma_1(F))$, wobei $\Gamma_1(F) = \{(F(a), a) \mid a \in A\}$.

(ii) Zeigen Sie $\dim(A) = \dim(F(A))$, indem Sie eine Zell-Zerlegung von $\Gamma_1(F)$ verwenden.

(iii) Schließen Sie daraus, dass für jede semi-algebraische Gruppe G und jeden semi-algebraischen Gruppenhomomorphismus $F : G \to G$ mit endlichem Kern $\mathrm{Ker}(F)$ der Index $[G : \mathrm{Im}(F)]$ endlich ist.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.**
Gegeben einen reell abgeschlossenen Körper R, sei $K \subset R^m$ ein semi-algebraischer Körper der Dimension 1 mit der τ-Topologie.

(i) Zeigen Sie, dass es τ-offene nicht-leere Teilmengen U und V von K so gibt, dass $x+y$ in U für alle x und y aus V liegt. Wir können außerdem U und V so wählen, dass es semi-algebraische Homöomorphismen $F\colon U \to I$ und $G\colon V \to J$ gibt, wobei I und J beide Intervalle aus R sind.

Hinweis: $0_K + 0_K = 0_K$.

(ii) Schließen Sie daraus, dass für jedes w aus J so ist die Abbildung $H_w\colon J \to I$ mit $z \mapsto F(G^{-1}(w) + G^{-1}(z))$ monoton wachsend oder fallend.

(iii) Zeigen Sie, dass wir J so einschränken können, dass entweder H_w monoton wachsend für alle w aus J oder H_w monoton fallend für alle w aus J ist.

(iv) Schließen Sie daraus, dass die Charakteristik von K ungleich 2 ist.

Hinweis: In J gibt es Punkte $u < v$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**
Sei R ein reell abgeschlossener Körper, $U \subset R^n$ eine offene semi-algebraische Teilmenge und f in $\mathcal{S}^2(U, R^m)$. Zeigen Sie, dass für alle i, j aus $\{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach 47 im dritten Stock des mathematischen Instituts.