Prof. Annette Huber-Klawitter
Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Christoph Brackenhofer

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2024/25

Semi-algebraische Geometrie

Blatt 2

Achtung! Abgabe schon am 31.10., 18:00 Uhr

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.**

Bestimmen Sie die maximalen Ideale von $\mathbb{R}[T_1, \ldots, T_n]$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**

Sei $(A, \leq)$ ein angeordneter Integritätsbereich (d.h. $\leq$ ist eine totale Ordnung und für alle x, y, z in A gilt: $x \leq y \implies x + z \leq y + z$ und $0 \leq x, y \implies 0 \leq xy$).

(i) Zeigen Sie, dass es genau eine Anordnung des Quotientenkörpers $Q(A)$ von A gibt, welche die Anordnung auf A fortsetzt.

(ii) Eine Anordnung $\leq$ eines Körpers K heißt *archimedisch*, wenn es für alle x aus K eine natürliche Zahl N derart gibt, dass $y \leq n$.

Zeigen Sie, dass eine Anordnung genau dann archimedisch ist, wenn für alle x, y aus K derart, dass $0 < x < y$, eine natürliche Zahl n derart existiert, dass $y \leq nx$.

(iii) Sei auf $\mathbb{R}[T]$ eine Anordnung dadurch definiert, dass für ein $f(T) = \sum_{r=0}^{n} a_r T^r$ mit $a_n \neq 0$ genau dann $f(T) > 0$, wenn $a_n > 0$. Ist die Fortsetzung dieser Anordnung auf $Q(\mathbb{R}[T])$ archimedisch?

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**

Bestimmen Sie $X(\mathbb{R})$ für die folgenden Varietäten:

(i) $X = V(T^8 - 1)$

(ii) $X = V(T^2 + S^2 - 1)$

(iii) $X = V(T^5 - T^4 + T - 1)$

(iv) $X = V(T^2S^2 - 3T^2 + S^2 - 3)$

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.**

Sei n eine natürliche Zahl und $N = 2(n + 1)^2$. Wir bezeichnen mit ψ die Abbildung von $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ nach $\mathbb{R}^N$, welche durch

$$[x_0 : \ldots : x_n] \mapsto \left(\cdots, \frac{\mathrm{Re}(x_r\overline{x_s})}{\sum_{k=0}^{n} |x_k|^2}, \frac{\mathrm{Im}(x_r\overline{x_s})}{\sum_{k=0}^{n} |x_k|^2}, \cdots \right)$$

gegeben ist.

(i) Zeigen Sie, dass ψ eine injektive Abbildung ist, deren Bild beschränkt ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $\psi(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ eine semi-algebraische Menge ist.

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach 47 im dritten Stock des mathematischen Instituts.