Prof. Annette Huber-Klawitter
Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Christoph Brackenhofer

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2024/25

Semi-algebraische Geometrie

Blatt 6

Abgabe: 29.11. 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**

(a) Geben Sie eine analoge Formulierung von Aufgabe 3 (i) auf Blatt 5 an, wobei Sie semi-algebraische Formeln durch *Zariski-konstruierbare* Formeln ersetzen, d.h. durch Boolsche Kombinationen von Ausdrücken der Form $P(X_1, \dots, X_m) = 0$. Beweisen Sie sie!

(b) Schließen Sie daraus, dass

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$$

keine Zariski-konstruierbare Menge ist.

(c) Folgern Sie daraus, dass die Kollektion aller $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$−Formeln ϕ mit $\mathbb{R} \models \phi$ nicht Quantorenelimination hat.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.**

Sei $(K, \leq)$ ein reell abgeschlossener Körper, der als $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{K}$ aufgefasst $\aleph_1$-saturiert ist. Sei $A \subset K$ eine abzählbare Teilmenge und $\phi[x, y, \bar{c}]$ eine A-Instanz der $\mathcal{L}$-Formel $\phi[x, y, \bar{z}]$ mit $\bar{c}$ aus $A^{|\bar{z}|}$. Wir setzen nun

$$S = \{(a, b) \in K^2 \mid \mathcal{K} \models \phi[a, b, \bar{c}]\}$$

die von der Instanz definierte Menge.

Falls für alle b aus K die Faser $S_b = \{a \in K \mid (a, b) \in S\}$ eine endliche Menge ist, zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl N derart gibt, dass

$$|S_b| \leq N$$

für alle b aus $\mathcal{K}$.

Hinweis: Geben Sie einen geeigneten partiellen 1-Typ an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**

Wir wissen, dass RCF Quantorenelimination hat. Zeigen Sie, dass für alle $\aleph_1$-saturierten reell abgeschlossenen Körper $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ die Menge $S(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ ein Back-and-Forth-System bildet.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.**

Betrachten Sie das Polynom $P(X_1, X_2) = 1 - 3X_1^2X_2^2 + X_1^2X_2^4 + X_1^4X_2^2$.

(i) Zeigen Sie, dass P keine Summe von Quadraten von Polynomen sein kann.

(ii) Zeigen Sie, dass P positiv semi-definit ist, indem Sie P umformen.

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach 47 im dritten Stock des mathematischen Instituts.