

Semi-algebraische Geometrie

Blatt 7

Abgabe: 06.12. 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte).

Ein angeordneter Körper (K, \leq) ist *existentiell abgeschlossen* in der Erweiterung (L, \leq) mit $K \subset L$, falls für alle Elemente a_1, \dots, a_n aus K und jede $\mathcal{L}_{\text{ORing}}$ -Formel

$$\varphi[x_1, \dots, x_n] = \exists y_1 \cdots \exists y_m \psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m] \text{ mit } \psi \text{ semialgebraisch,}$$

folgendes gilt: Wenn $L \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$, so $K \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

Zeigen Sie, dass ein angeordneter Körper genau dann reell abgeschlossen ist, wenn er in jeder angeordneten Körpererweiterung existentiell abgeschlossen ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte).

Sei $Q(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ ein positiv semi-definites Polynom von Totalgrad 2.

- (i) Zeigen Sie, dass $P(X_0, X_1, \dots, X_n) = X_0^2 Q(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0})$ ebenfalls positiv semi-definit ist.
- (ii) Benutzen Sie den Trägheitssatz von Sylvester um zu zeigen, dass P eine Summe von höchstens $n + 1$ Quadraten von Polynomen ist.
- (iii) Folgern Sie, dass Q eine Summe von höchstens $n + 1$ Quadraten von Polynomen ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte).

Betrachten Sie den angeordneten Körper $\mathbb{R}[[T^{\mathbb{Q}}]]$ aus der Aufgabe 2 auf Blatt 1.

- (i) Sei $\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ ein Automorphismus von angeordneten Gruppen. Zeigen Sie, dass φ einen Körperautomorphismus von $\mathbb{R}[[T^{\mathbb{Q}}]]$ mit $T \mapsto T^{\varphi(1)}$ definiert.
- (ii) Ist die Menge der Körperautomorphismen von $\mathbb{R}[[T^{\mathbb{Q}}]]$ endlich?
- (iii) Zeigen Sie, dass das Intervall $(0, 1) \subset \mathbb{R}[[T^{\mathbb{Q}}]]$ nicht zusammenhängend ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte).

Bestimmen Sie die Zellenzerlegung der semi-algebraischen Menge

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 z = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass X sich als endliche Vereinigung paarweise disjunkter semi-algebraisch zusammenhängender semi-algebraischer Mengen schreiben lässt, genannt die *Zusammenhangskomponenten* von X .