Prof. Annette Huber-Klawitter
Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Christoph Brackenhofer

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2024/25

Semi-algebraische Geometrie
Blatt 7
Abgabe: 06.12. 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**
Ein angeordneter Körper $(K, \leq)$ ist *existentiell abgeschlossen* in der Erweiterung $(L, \leq)$ mit $K \subset L$, falls für alle Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus K und jede $\mathcal{L}_{\text{ORing}}$−Formel

$$\varphi[x_1, \ldots, x_n] = \exists y_1 \cdots \exists y_m \psi[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m] \text{ mit } \psi \text{ semialgebraisch,}$$

wenn $L \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$, dann so gilt $K \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$.
Zeigen Sie, dass ein angeordneter Körper genau dann reell abgeschlossen ist, wenn er in jeder angeordneten Körpererweiterung existentiell abgeschlossen ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**
Sei $Q(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ ein positiv semi-definites Polynom von Totalgrad 2.

(i) Zeigen Sie, dass $P(X_0, X_1, \ldots, X_n) = X_0^2 Q(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0})$ ebenfalls positiv semi-definit ist.

(ii) Benutzen Sie den Trägheitssatz von Sylvester um zu zeigen, dass P eine Summe von höchstens $n+1$ Quadraten von Polynomen ist.

(iii) Folgern Sie, dass Q eine Summe von höchstens $n+1$ Quadraten von Polynomen ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.**
Betrachte den angeordnete Körper $\mathbb{R}[[T^{\mathbb{Q}}]]$ aus der Aufgabe 2 im Blatt 1.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}[[T^{\mathbb{Q}}]]$ reell abgeschlossen ist.

(ii) Zeigen Sie, dass das Intervall $(0, 1) \subset \mathbb{R}[[T^{\mathbb{Q}}]]$ nicht zusammenhängend ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**
Bestimmen Sie die Zellenzerlegung der semi-algebraischen Menge

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 z = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass X sich als endliche Vereinigung paarweise disjunkter semialgebraisch zusammenhängender semialgebraischer Mengen schreiben lässt, genannt die *Zusammenhangskomponenten* von X.

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach 47 im dritten Stock des mathematischen Instituts.