Prof. Annette Huber-Klawitter
Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Christoph Brackenhofer

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2024/25

Semi-algebraische Geometrie
Blatt 8
Abgabe: 13.12. 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

Gegeben einen reell abgeschlossener Körper R, sei $f\colon R^n \to R$ eine semi-algebraische Funktion mit Graph $\Gamma(f) \subset R^{n+1}$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathrm{Cont}(f) = \{x \in R^n \mid f \text{ ist stetig in } x\}$$

semi-algebraisch ist. Liegt $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathrm{Cont}(f)\}$ dicht in $\Gamma(f)$?

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**

Betrachten Sie einen reell abgeschlossenen Körper R.

(i) Seien A und B zwei semi-algebraische semi-algebraisch zusammenhängende Teilmengen von R^n mit $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass $A \cup B$ ebenfalls semi-algebraisch zusammenhängend ist.

(ii) Schließen Sie daraus, dass der topologische Abschluss einer semi-algebraischen semi-algebraisch zusammenhängenden Teilmenge wiederum semi-algebraisch zusammenhängend ist.

(iii) Zeigen Sie, dass das kartesische Produkt zweier semi-algebraischer semi-algebraisch zusammenhängender Teilmengen wiederum semi-algebraisch zusammenhängend ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.**

Sei R ein reell abgeschlossener Körper und $C = R(\sqrt{-1})$. Bestimmen Sie die Dimensionen der folgenden semi-algebraischen Teilmengen

(a) $X_a = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = a\}$ für a aus R;

(b) $Y = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 - zy^2 = 0; z \geq 1 \geq x\}$;

mit Hilfe des Zariski-Abschlusses.

Betrachten Sie nun für a aus R in C^2 die Teilmengen

$$W_a = \{(z, w) \in C^2 \mid z^2 + w^2 = a\}.$$

Bestimmen Sie die irreduziblen Komponenten (über C) sowie die semi-algebraischen Zusammenhangskomponenten über R.

Vergleichen Sie X_0 mit den reellen Punkten von W_0. Stimmen die Dimensionen von X_0 und von W_0 überein?

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach 47 im dritten Stock des mathematischen Instituts.