Prof. Annette Huber-Klawitter
Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Christoph Brackenhofer

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2024/25

Semi-algebraische Geometrie
Blatt 9
Abgabe: 20.12. 14:00 Uhr

Auf diesem Blatt bezeichnet R stets einen reell abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Sei A eine semi-algebraische Menge und seien $A_1, \dots, A_r$ semi-algebraische Teilmengen von A. Zeigen Sie, dass es eine Zellenzerlegung von A derart gibt, dass jede Zelle vollständig in einem der A_k oder in $A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_r)$ liegt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Sei A eine semi-algebraische Teilmenge des R^{m+n} und $\pi\colon R^{m+n} \to R^m$ die Projektion auf die ersten m Koordinaten. Zeigen Sie, dass es eine semi-algebraische Funktion $f\colon \pi(A) \to R^n$ derart gibt, dass der Graph $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in R^{n+m} \mid x \in \pi(A)\}$ in A liegt.

Hinweis: Betrachten Sie den Fall $n = 1$.

Das folgende Resultat zeigt, dass wir Folgen in bestimmten Situationen durch semi-algebraische Wege ersetzen können. Das ist nützlich, weil die Topologie auf einem reell abgeschlossenen Körper im Allgemeinen nicht die erste Abzählbarkeitseigenschaft (*first countable*) besitzt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Sei $A \subset R^n$ eine semi-algebraische Menge und b ein Punkt im Abschluss $\bar{A}$ von A. Zeigen Sie, dass es eine stetige semi-algebraische Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to \bar{A}$ derart gibt, dass $\gamma(0) = b$ und $\gamma((0,1)) \subset A$.

Hinweis: Zeigen Sie erst die Existenz einer semi-algebraischen Abbildung γ und argumentieren Sie dann, dass γ stetig gewählt werden kann.

Aufgabe 4 (8 Punkte)**.**
Sei $E \subset R^n \times R^n$ eine Äquivalenzrelation derart, dass die Menge E semi-algebraisch ist. Wir bezeichnen für $\bar{a}$ aus R^n seine E-Klasse mit $[\bar{a}]_E$.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge
$$X = \{\bar{a} \in R^n \mid \bar{a} \text{ liegt im Inneren von } [\bar{a}]_E\}$$
eine semi-algebraische Menge ist.

(b) Zeigen Sie, dass $X \cap [\bar{a}]_E$ offen in X ist.

(c) Zeigen Sie, dass $X \cap [\bar{a}]_E$ abgeschlossen in X ist.

(d) Zeigen Sie, dass es für jede E-Klassen mit nicht-leerem Inneren $[a]_E$ eine Zelle X_i von X (bezüglich einer Zellzerlegung) so gibt, dass $X_i \subset [a]_E$.

Schließen Sie daraus, dass die Anzahl der E-Klassen mit nicht-leerem Inneren endlich ist.

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach 47 im dritten Stock des mathematischen Instituts.