Semi-algebraische Geometrie

Wintersemester 2024/25

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter

Fassung vom 9. Oktober 2024

Dies ist ein Vorlesungsskript und kein Lehrbuch.
Mit Fehlern muss gerechnet werden!

Math. Institut
Ernst-Zermelo-Str.1
79104 Freiburg

0761-203-5560
annette.huber@math.uni-freiburg.de

Vorab

Die Vorlesung wird im Wechsel von Annette Huber-Klawitter und Amador Martin-Pizarro gehalten. Dieses Skript wird voraussichtlich nur die Anteile von Huber-Klawitter enthalten.

Konventionen

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ beginnen bei 1. Das Zeichen $\subset$ bedeutet Teilmenge (Gleichheit erlaubt). Wir verwenden Unterstriche um Tupel zu bezeichnen, z.B. $(x_1, \ldots, x_n) = \underline{x}$.

Literatur

(i) Jacek Bochnak, Michel Coste & Marie-Françoise Roy: Real Algebra, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenz- gebiete 36, Springer Verlag, 1998.

(ii) L. van den Dries: Tame topology and o-minimal structures, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, 1998.

(iii) Salma Kuhlmann, Reelle algebraische Geometrie I, Skript aus dem WS 201472015.

(iv) Alexander Prestel, Reelle Algebra, Skript aus dem WS 07/08.

Kapitel 1

Semi-algebraische Mengen: Grundlagen

Wir arbeiten zunächst über $\mathbb{R}$ als Beispiel für einen angeordneten Körper.

Definition 1.1. *Ein* angeordneter Körper *ist ein Paar* $(K, \leq)$, *wobei* K *ein Körper,* $\leq$ *eine totale Ordnung auf* K *und für alle* $a, b, c \in K$ *gilt zusätzlich*

(i) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$,

(ii) $0 \leq a, b \Rightarrow 0 \leq ab$.

Wir erinnern uns: eine totale Ordnung auf einer Menge M ist eine transitive, reflexive und anti-symmetrische Relation.

Definition 1.2. *Eine Teilmenge* $S \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* semi-algebraische Menge, *falls* S *endliche boolsche Kombination (Durchschnitt, Vereinigung, Komplement) von Mengen der Gestalt*

$$U(f) = \{a \in \mathbb{R}^n \mid f(a) > 0\}$$

mit $f \in \mathbb{R}[\underline{X}] = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ *Die Menge* S *heißt* algebraisch, *falls*

$$S = V(f_1, \ldots, f_r) := \{a \in \mathbb{R}^n \mid f_1(a) = \cdots = f_r(a) = 0\}$$

für gewisse $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{R}[\underline{X}]$.

Nach Definition bilden die semi-algebraischen Mengen also eine *boolsche Algebra*. Wir schreiben auch

$$U(f_1, \ldots, f_r) = U(f_1) \cap \cdots \cap U(f_r).$$

Die folgenden Mengen sind semi-algebraisch:

- $U(1) = \mathbb{R}^n$, $U(0) = \emptyset$.
- Für jedes $f \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ gilt $\mathbb{R}^n \setminus U(f) = \{a \in \mathbb{R}^n \mid -f(a) \geq 0\}$.

- $V(f) := \{a \in \mathbb{R}^n \mid f(a) = 0\} = (\mathbb{R}^n \smallsetminus U(f)) \cap (\mathbb{R}^n \smallsetminus U(-f))$
- $U(f_1) \cap U(f_2) = \{a \in \mathbb{R}^n | f_1(a) > 0, f_2(a) > 0\}$
- $U(f_2) \cup U(f_2) = \{a \in \mathbb{R}^n | (f_1(a) > 0) \vee (f_2(a) > 0)\}$.

Wir halten nach (3) fest:

Korollar 1.3. *Algebraische Teilmengen sind semi-algebraisch.*

Satz 1.4 (Normalform)**.** *Jede semi-algebraische Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^n$ hat die Form*

$$S_1 \cup \cdots \cup S_m$$

wobei

$$S_i = \{a \in \mathbb{R}^n \mid g_i(a) = 0, f_{i1}(a) > 0, \dots f_{ir_i}(a) > 0 = V(g) \cap U(f_{i1}, \dots f_{ir_i})$$

für gewisse $g_i, f_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}]$

Beweis: Sei S boolsche Kombination von Mengen der Gestalt $U(f)$. Wir wenden die de Morganschen Regeln an, um Komplemente mit Schnitten und Vereinigungen zu vertauschen. Damit schreiben wir S als endliche Vereinigung von Mengen der Form

$$U(g_1)^c \cap \dots U(g_m)^c \cap U(f_1) \cap \cdots \cap U(f_r)$$

wobei $U(g_i)^c = \mathbb{R}^n \smallsetminus U(g_i)$. Wir ersetzen $U(g_i)^c$ durch $U(-g) \cup V(g)$ und lösen weiter distributiv auf. Dann ist S endliche Vereinigung von Mengen der Form

$$V(h_1) \cap \dots V(h_s) \cap U(f_1, \dots, f_r).$$

Den ersten Teil fassen wir wie in Lemma 1.8 zusammen zu einem einzigen $V(h)$. □

Korollar 1.5. *Die algebraischen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind die endlichen Mengen (oder ganz $\mathbb{R}$). Die semi-algebraischen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die endlichen Vereinigungen von ein-elementigen Mengen und offenen Intervallen (a, b) mit $a, b \in [-\infty, \infty]$.*

Beweis: Nullstellenmengen von nicht-konstanten Polynomen sind endlich, daher sind algebraische Teilmengen endlich (oder ganz $\mathbb{R}$ für das Nullpolynom).
Positivstellenmengen von Polynomen sind Vereinigungen von offenen Intervallen, deren Randpunkte Nullstellen des Polynoms sind. (Zwischenwertsatz!)
Alternativ: Die Aussage gilt für lineare und quadratische Polynome. Jedes Polynom in $\mathbb{R}[X]$ hat eindeutig die Form

$$P = P_1 \dots P_n$$

wobei P_i entweder linear oder quadratisch ist. Wir erhalten $U(P)$ als Vereinigung von Mengen der Form

$$U(\pm P_1, \dots, \pm P_n)$$

für eine gerade Zahl von negativen Vorzeichen. □

Bemerkung. Diesen Punkt müssen wir im Auge behalten, wenn wir $\mathbb{R}$ durch einen allgemeineren Körper ersetzen. Der Zwischenwertsatz benutzt topologische Eigenschaften von $\mathbb{R}$. Das zweite Argument funktioniert allgemein.

Erstes und wichtiges Ziel unserer Vorlesung ist der Projektionssatz:

Theorem 1.6. *Sei $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ semi-algebraisch. Dann ist auch*

$$S' = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \text{ es gibt } b \in \mathbb{R} \text{ mit } (a_1, \dots, a_n, b) \in S\}$$

eine semi-algebraische Teilmenge.

Mit anderen Worten: Das Bild einer semi-algebraische Menge unter der Projektionsabbildung $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ auf die ersten n Koordinaten ist wieder semi-algebraisch.
Das Theorem hat enorme Konsequenzen, hier ein Beispiel:

Satz 1.7. *Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ semi-algebraisch. Dann sind auch der Abschluss und das Innere von S semi-algebraisch.*

Beweis: Es ist nach Definition

$$\overline{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \varepsilon > 0 \exists y \in S : \|x - y\| < \varepsilon\}.$$

Dies lässt sich umformulieren:

$$\|x - y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2$$

ist ein Polynom. Eine reelle Zahl ist genau dann positiv, wenn sie eine Quadratzahl ist. Also:

$$\overline{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \varepsilon \in \mathbb{R} : \varepsilon = 0 \vee \exists y \in S : \|x - y\|^2 < \varepsilon^2\}.$$

Die Menge

$$T = \left\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid y \in S \wedge (t = 0 \vee \|x - y\|^2 < t^2)\right\}$$

ist semi-algebraisch. Seien

$$\pi_1 : (x, y, t) \mapsto (x, t), \quad \pi_2 : (x, t) \mapsto x$$

die Projektionen. Nach dem Projektionssatz ist

$$\pi_2(T) = \left\{(x, t) \mid t = 0 \vee (\exists y \in S : \|x - y\|^2 < t^2\right\}$$

semi-algebraisch, und daher auch

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \pi_2(T) = \left\{(x, t) \mid t \neq 0 \vee (\forall y \in S : \|x - y\|^2 \geq t^2)\right\}$$

. Nach dem Projektionssatz ist

$$\pi_1(\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \pi_2(T)) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \in \mathbb{R} : t \neq 0 \forall y \in S : \|x-y\|^2 \geq t^2)\right\}$$

semi-algebraisch, also auch das Komplement

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall t \in \mathbb{R} : t = 0 \wedge \exists y \in S : \|x-y\|^2 < t^2\right\}$$

semi-algebraisch.
Wir erhalten das Innere von S als das Komplement des Abschlusses von $\mathbb{R}^n \smallsetminus S$. □

Wie im Beweis verwendet dürfen wir semi-algebraische Mengen allgemein mit Quantoren $\exists$, $\forall$ und Ungleichungen von Polynomialen Ausdrücken definieren. Man spricht von Logik erster Stufe (mehr in den folgenden Kapiteln).

Topologische Eigenschaften

Lemma 1.8. *Beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen von $\mathbb{R}$-algebraischen Mengen sind $\mathbb{R}$-algebraisch. Jede algebraische Teilmenge ist von der Form $V(f)$ für ein $f \in \mathbb{R}[\underline{X}]$.*

Beweis: Dies ist aus der algebraischen Geometrie bekannt. Wir behaupten:

$$V(f_1, \dots, f_r) \cup V(g_1, \dots, g_s) = V(f_i g_j | i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s)$$

Die Inklusion $\subset$ ist offensichtlich. Sei a nicht Element der linken Seite. Dann gibt es i und j, so dass $f_i(a) \neq 0$ und $g_j(a) \neq 0$. Es folgt $f_i g_j(a) \neq 0$, also liegt a auch nicht in der Menge auf der rechten Seite. Dies beweist die Formel für die Vereinigung.
Wir betrachten nun Schnitte. Offensichtlich sind endliche Schnitte von algebraischen Menge algebraisch. Es ist

$$V(f_1, \dots, f_r) \cap V(g_1, \dots, g_s) = V(f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s).$$

Es bleibt zu zeigen: Für jede Teilmenge $T \subset \mathbb{R}[\underline{X}]$ ist

$$V(T) = \{a \in \mathbb{R}^n | f(a) = 0 \text{ für alle } f \in T\}$$

algebraisch, d.h. endlich viele Gleichungen reichen. Dafür beobachten wir

$$V(T) = V(I(T))$$

wobei $I(T) \subset \mathbb{R}[\underline{X}]$ das von T erzeugte Ideal ist. Da $\mathbb{R}[\underline{X}]$ noethersch ist (setzen wir aus der kommutativen Algebra voraus), ist $I(T) = I(T')$ für eine endliche Menge T' und daher

$$V(I(T)) = V(I(T')) = V(T')$$

algebraisch.
Und letztlich:

$$V(f_1, \dots, f_r) = V(f_1^2 + \dots + f_r^2)$$

denn eine Summe von nichtnegativen reellen Zahlen ist genau dann 0, wenn jeder Summand verschwindet. □

Die algebraischen Teilmengen bilden also eine Topologie auf $\mathbb{R}^n$, die *Zariski-Topologie*. Mengen die offen/abgeschlossen in der Zariski-Topologie sind, sind auch offen/abgeschlossen in der gewöhnlichen Topologie (die man als *metrische* Topologie, *euklidische* Topologie oder *Intervallpologie* bezeichnet).
Intervalle $(a, b) \subset \mathbb{R}$ sind semi-algebraisch als $U(X - a, -X + b)$. Dies verallgemeinert sich

Lemma 1.9. *Die Mengen der Form $U(f_1, \dots, f_m) := U(f_1) \cap \dots \cap U(f_m)$ sind eine Basis der Intervall-Topologie auf $\mathbb{R}^n$.*

Beweis: Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann offen, wenn es für jedes $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ reelle Zahlen $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$ gibt, so dass

$$(a_1 - \varepsilon_1, a_1 + \varepsilon_1) \times \dots (a_n - \varepsilon_n, a_n + \varepsilon_n) \subset U.$$

Dieses Produkt von Intervallen ist semi-algebraisch als

$$U(X_1 - a_1 + \varepsilon_1, -X_1 + a_1 + \varepsilon_1, \dots).$$

Umgekehrt sind alle $U(f_1, \dots, f_m)$ offen. □

Morphismen

Semi-algebraische Mengen bilden eine Kategorie.

Definition 1.10. *Seien $S \subset \mathbb{R}^n$ und $T \subset \mathbb{R}^m$ semi-algebraisch. Eine Abbildung $\phi : S \to T$ heißt* semi-algebraisch*, wenn ihr Graph $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ semi-algebraisch ist.*
Die Kategorie der semi-algebraischen Mengen *hat als Objekte semi-algebraische Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ (für variables n) und als Morphismen semi-algebraische Abbildungen. Die* Kategorie der semi-algebraischen Räume *hat als Objekte semi-algebraische Mengen $S \subset \mathbb{R}^n$ mit der Teilraumtopologie und als Morphismen stetige semi-algebraische Abbildungen.*

Nicht jede semi-algebraische Abbildung ist stetig!

Beispiel. Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}.$$

Diese Abbildung ist nicht stetig in 0. Der Graph ist

$$\{(t, 0) | t \leq 0\} \cup \{(t, 1) | t > 0\},$$

also semi-algebraisch.

Bemerkung. Analog könnte man eine Kategorie von algebraischen Mengen definieren, bei denen ein Morphismus algebraisch heißt, wenn der Graph eine algebraische Menge ist. Dieser Begriff scheint in der Literatur nicht vorzukommen.
Das folgende Beispiel zeigt, dass Subtilitäten zu beachten sind.

Beispiel. Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als $x \mapsto \sqrt[3]{(x)}$. Dann ist der Graph

$$\Gamma = \{(x, y) \mid y = \sqrt[3]{x}\} = \{(x, y) \mid y^3 = x\}$$

eine algebraische Teilmenge. Die Abbildung ϕ ist insbesondere semi-algebraisch. Sie ist *nicht* durch Polynome definiert.

Lemma 1.11. *(i) Kompositionen von semi-algebraischen Abbildungen sind semi-algebraisch.*

(ii) Die Menge der semi-algebraischen Abbildungen $A \to \mathbb{R}$ ist eine $\mathbb{R}$-Algebra.

Beweis: Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$ semi-algebraisch mit Graphen $F \subset A \times B$, $G \subset B \times C$. Dann ist

$$F \times C \cap A \times G = \{(x, y, z) | f(x) = y, g(y) = z\}$$

semi-algebraisch. Nach dem Projektionssatz auch

$$\{(x, z) | \exists y : y = f(x), z = g(y)\},$$

also der Graph von $g \circ f$.
Die zweite Aussage folgt aus der ersten, da z.B.

$$f + g : A \to A \times A \xrightarrow{(f,g)} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{+} \mathbb{R}$$

und der Graph von $+$

$$\{(x, y, z) \mid z = x + y\}$$

semi-algebraisch ist. □

Satz 1.12. *Sei $f : A \to B$ semi-algebraische Abbildung. Wenn $S \subset A$ semi-algebraisch ist, dann auch $f(A) \subset B$. Wenn $T \subset B$ semi-algebraisch ist, dann auch $f^{-1}(T) \subset A$.*

Beweis: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$. Wir erhalten $f(S)$ als das Bild von $S \times B \cap \Gamma_f$ (wobei Γ_f der Graph von f ist) unter der Projektionsabbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Wir erhalten $f^{-1}(T)$ als das Bild von $A \times T \cap \Gamma_f$ unter der Projektionsabbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. □

Bemerkung. Die analoge Aussage für algebraische Mengen ist *falsch*, selbst wenn man mit Abbildungen arbeitet, die durch Polynome definiert werden. Das Bild von $x \mapsto x^2$ auf $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Diese Menge ist semi-algebraisch, aber nicht algebraisch.
Beim Studium von algebraischen Mengen über $\mathbb{R}$ wird man automatisch auch auf semi-algebraische Mengen gestoßen.

Lemma 1.13. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ nicht-leere semi-algebraische Menge.*

(i) Für all $x \in \mathbb{R}^n$, der Abstand zwischen x und AFor every x in R n , t

$$\mathrm{dist}(x, A) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in A\}$$

ist wohl-definiert.

(ii) Die Funktion $x \mapsto \mathrm{dist}(x, A)$ von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ ist stetig und semi-algebraisch. Sie verschwindet genau auf $\overline{A}$.

Beweis: Die Menge $\|x-y\| \mid y \in A\}$ ist das Bild der semi-algebraischen Funktion $y \mapsto \|x - y\|$. Sie ist also semi-algebraisch. Sie ist nach unten beschränkt (durch 0). Nach Korollar 1.5 über semi-algebraische Teilmengen von $\mathbb{R}$ hat sie eine untere Schranke, dies ist das Infimum.
Der Graph der Funktion ist

$$\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq 0 \wedge \forall y \in A : t^2 \leq \|x-y\|^2 \wedge \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists y \in A : t^2 + \varepsilon > \|x-y\|^2\}$$

also semi-algebraisch.
Die anderen Aussagen folgen sofort. □

Zur eventuellen Verwendung:

Lemma 1.14. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ semi-algebraisch und lokal-abgeschlossen, d.h. Schnitt einer offenen mit einer abgeschlossenen Teilmenge. Dann existiert ein semi-algebraischer Homöomorphismus $A \to B$, wobei $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine semi-algebraische abgeschlossene Teilmenge ist.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist

$$A = A' \cap U'$$

wobei A' abgeschlossen ist und U' offen. Dann ist $\overline{A} \subset A'$, also ohne Einschränkung $A' = \overline{A}$.
Die Menge

$$U = (\mathbb{R}^n \smallsetminus \overline{A}) \cup A$$

ist offen, da

$$(\mathbb{R}^n \smallsetminus \overline{A} \cup (\overline{A} \cap U') = [(\mathbb{R}^n \smallsetminus \overline{A}) \cap \overline{A}] \cup [(\mathbb{R}^n \smallsetminus \overline{A}) \cap U'] = (\mathbb{R}^n \smallsetminus \overline{A}) \cap U'$$

Sie ist offensichtlich semi-algebraisch. Gleichzeitig ist

$$\overline{A} \cap U = \overline{A} \cap [(\mathbb{R}^n \smallsetminus \overline{A}) \cup A] = \emptyset \cup A.$$

Wir ersetzen also U' durch ein semi-algebraisches U.
Falls A abgeschlossen ist, so wählen wir als Homöomorphismus $x \mapsto (x, 0)$. Falls A nicht abgeschlossen ist, so ist $U \neq \mathbb{R}^n$ und daher $\mathbb{R}^n \smallsetminus U$ nicht-leer. Die Abbildung

$$x \mapsto \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^n \smallsetminus U)$$

ist semi-algebraisch und stetig. Sie nimmt den Wert 0 nicht an, da $A \subset U$. Die Abbildung

$$\phi : x \mapsto (x, (\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^n \smallsetminus U))^{-1})$$

bildet A in die abgeschlossene semi-algebraische Teilmenge

$$B = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \overline{A} \wedge t \cdot \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^n \smallsetminus U) = 1\}$$

ab. Es ist

$$\mathbb{R}^n \smallsetminus U = \mathbb{R}^n \smallsetminus [(\mathbb{R}^n \smallsetminus \overline{A}) \cup A] = [\mathbb{R}^n \smallsetminus (\mathbb{R}^n \smallsetminus \overline{A})] \cap [\mathbb{R}^n \smallsetminus A] = \overline{A} \smallsetminus A.$$

Für alle $(x,t) \in B$ ist also $\mathrm{dist}(x, \overline{A} \smallsetminus A)$ ungleich 0, also folgt $x \notin \overline{A} \smallsetminus A$. Gleichzeitig ist $x \in \overline{A}$, also insgesamt $x \in A$. Die Projektion $(x,t) \mapsto x$ hat Werte in A. Sie ist invers zu ϕ. □

Reelle affine Varietäten

Was soll es bedeuten, dass eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (oder auf einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ algebraisch ist? Je nach Teilgebiet werden unterschiedliche Definitionen benutzt:

- Analysis/Transzendenztheorie von Funktionen: f liegt in im algebraischen Abschluss von $\mathbb{R}[T_1, \ldots, T_n]$ $\sqrt[n]{X}$)
- Algebraische Geometrie: $f \in \mathbb{R}(T_1, \ldots, T_n)$.
- ...

Wir werden den Begriff daher vermeiden und statt dessen von *regulären Abbildungen* von reellen Varietäten sprechen. Da $\mathbb{R}$ nicht algebraisch abgeschlossen ist, müssen wir die Begriffe aus der Vorlesung im SS verfeinern.
Zur Erinnerung: Eine affine Varität X über $\mathbb{C}$ ist eine algebraische Teilmenge von $\mathbb{C}^n$ (mit der Zariski-Topologie). Ihr *Verschwindungsideal* ist

$$I(X) = \{f \in \mathbb{C}[T_1, \ldots, T_n] \mid f(x) = 0 \forall x \in X\}.$$

Es ist ein *Radikalideal*, d.h. $f^n \in I(X) \Rightarrow f \in I(X)$. Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, ist die Korrespondenz zwischen affeinen Varietäten und Radikalidealen *bijektiv* (Hilbertscher Nullstellensatz).

Definition 1.15. *Der* affine Raum $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ *ist* $(\mathbb{C}^n, \iota)$ *wobei* ι *die komponentenweise komplexe Konjugation ist. Wir schreiben*

$$\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n, \quad \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n.$$

Eine affine Varietät X über $\mathbb{R}$ *ist das Paar* $(X(\mathbb{C}), \iota|_X)$*, wobei* $X(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^n$ *eine algebraische Teilmenge ist , so dass* $\iota(X(\mathbb{C})) = X(\mathbb{C})$*. Wir schreiben*

$$X(\mathbb{R}) = X(\mathbb{C})^\iota = \{x \in X(\mathbb{C}) \mid \iota(x) = x\} = X(\mathbb{C}) \cap \mathbb{R}^n.$$

Oft sagt man auch, X ist *definiert über* $\mathbb{R}$. Mit $X_{\mathbb{C}}$ bezeichnen wir $X(\mathbb{C})$ aufgefasst als affine Varität über $\mathbb{C}$ (d.h. wir vergessen die komplexe Konjugation).

Beispiel. Die Teilmenge $\{0\} \subset \mathbb{C}$ ist eine affine Varität über $\mathbb{R}$, denn sie ist die Nullstellen Menge des Polynoms T (also algebraische Menge) und $\iota(0) = 0$.
Die Teilmenge $i \subset \mathbb{C}$ ist keine affine Varität über $\mathbb{R}$, wohl aber $\{i, -i\}$ als Nullstellenmenge von $X^2 + 1$. In diesem Fall ist $X(\mathbb{R}) = \emptyset$.

Lemma 1.16. *Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{C}^n$ definiert genau dann eine affine Varität über $\mathbb{R}$, wenn sie von der Form*

$$V(f_1, \dots, f_r) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid f_1(x) = \cdots = f_n(x) = 0\}$$

für $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}[T_1, \dots, T_n]$ ist. Die Menge $V(f_1, \dots, f_r)(\mathbb{R})$ ist algebraisch im Sinne von Definition 1.2 und jede algebraische Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist von dieser Form.

Beweis: Nach Voraussetzung $X = V(f_1, \dots, f_r)$ für $f_i \in \mathbb{C}[T_1, \dots, T_n]$. Wir betrachten das Verschwindungsideal $I(X_{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{C}[T_1, \dots, T_n]$. Sei ιf das Polynom mit komplex konjugierten Koeffizienten. Für jedes $x \in X(\mathbb{C})$ gilt

$$\iota f(x) = \overline{f(\overline{x})} = 0$$

da $\overline{x} = \iota(x) \in X(\mathbb{C})$. Damit ist $\iota(f) \in I(X(\mathbb{C}))$ und dann auch $\mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \iota(f))$ und $\mathrm{Im}(f) = \frac{1}{2i}(f - \iota)$. Die Polynome

$$\mathrm{Re}(f_1), \mathrm{Im}(f_1), \dots, \mathrm{Re}(f_r), \mathrm{Im}(f_r)$$

sind die gesuchten Definitionsgleichungen.
Die Zusatzaussage ist klar nach Definition. □

Definition 1.17. *Sei $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ affine Varietät über $\mathbb{R}$. Das* Verschwindungsideal *von X ist*

$$I(X) = \{f \in \mathbb{R}[T_1, \dots, T_n] \mid f(x) = 0 \forall x \in X(\mathbb{C})\}.$$

Der Ring

$$\mathcal{O}(X) = \mathbb{R}[X] = \mathbb{R}[T_1, \dots, T_n]/I(X)$$

heißt affiner Koordinatenring *von X.*

Alle Ideale in $\mathbb{R}[T_1, \dots, T_n]$ sind endlich erzeugt, daher ist $V(I)$ eine reelle affine Varietät.

Korollar 1.18. *Sei $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ affine Varität über $\mathbb{R}$. Dann ist*

$$I(X) = I(X_{\mathbb{C}}) \cap \mathbb{R}[T_1, \dots, T_n]$$

und

$$I(X_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}[T_1, \dots, T_n]I = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} I(X).$$

Wenn Sie nicht mit dem Tensorprodukt vertraut sind: Dies ist die Menge der Polynome, so dass Realteil und Imaginärteil in $I(X)$ liegen.

Beispiel. Wir betrachten $X = \{\pm i\}$. Es ist $I(X_\mathbb{C}) = \mathbb{C}[T]((T+i)(T-i))$. Das Polynom $(T+i)(T-i) = T^2+1$ ist reell.

Theorem 1.19. *Die Korrespondenz zwischen reellen affinen Varietäten in $\mathbb{A}^n_\mathbb{R}$ und Radikalidealen in $\mathbb{R}[T_1,\dots,T_n]$ ist bijektiv.*

Beweis: Die Aussage gilt über $\mathbb{C}$ nach dem Hilbertschen Nullstellensatz, also

$$I(V(I)) = I, \quad V(I(X_\mathbb{C})) = X(\mathbb{C})$$

für alle Radikalideale $I \subset \mathbb{C}[T_1,\dots,T_n]$ und algebraische Mengen $X_\mathbb{C} \subset \mathbb{C}^n$.
Sei nun $X \subset \mathbb{A}^n_\mathbb{R}$ affine Varität über $\mathbb{R}$. Nach Definition gilt

$$I(X) = I(X_\mathbb{C}) \cap \mathbb{R}[T_1,\dots,T_n].$$

Im letzten Beweis haben wir gezeigt, dass das von $I(X)$ in $\mathbb{C}[T_1,\dots,T_n]$ erzeugte Ideal gleich $I(X_\mathbb{C})$ ist. Es folgt also

$$V(I(X)) = V(I(X_\mathbb{C})) = X(\mathbb{C}).$$

Sei umgekehrt $I \subset \mathbb{R}[T_1,\dots,T_n]$ ein Radikalideal. Dann ist

$$\begin{aligned} I(V(I)) &= I(V(I)_\mathbb{C}) \cap \mathbb{R}[T_1,\dots,T_n] \\ &= I(V(\mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} I)) \cap \mathbb{R}[T_1,\dots,T_n] = \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} I \cap \mathbb{R}[T_1,\dots,T_n] = I. \end{aligned}$$

□

Zur Erinnerung: Seien $X_\mathbb{C} \subset \mathbb{A}^n_\mathbb{C}$, $Y_\mathbb{C} \subset \mathbb{A}^m_\mathbb{C}$ affine Varietäten über $\mathbb{C}$ Ein Morphismus von affinen Varietäten (auch: reguläre Abbildung)$f : X_\mathbb{C} \to Y_\mathbb{C}$ ist eine Abbildung von der Form $f = (f_1,\dots,f_m)$ für Polynome $f_1,\dots,f_m \in \mathbb{C}[T_1,\dots,T_n]$.

Definition 1.20. *Seien $X \subset \mathbb{A}^n_\mathbb{R}$ und $Y \subset \mathbb{A}^m_\mathbb{R}$ reelle affine Varieäten. Ein* Morphismus von reellen affinen Varietäten $f : X \to Y$ *ist ein Morphismus von affinen Varietäten $f : X_\mathbb{C} \to Y_\mathbb{C}$, so dass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} X(\mathbb{C}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & Y(\mathbb{C}) \arrow[d, "\iota"] \\ X(\mathbb{C}) \arrow[r, "f"] & Y(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Wir sprechen auch von einer *regulären Abbildung definiert über* $\mathbb{R}$..

Lemma 1.21. *Jeder Morphismus von reellen affinen Varietäten $f : X \to Y$ definiert eine semi-algebraische Abbildung $f : X(\mathbb{R}) \to Y(\mathbb{R})$.*

Beweis: Für $x \in X(\mathbb{R})$ folgt

$$f(x) = f(\iota(x)) = \iota f(x),$$

also $f(x) \in Y(\mathbb{R})$. Wir erhalten eine wohldefinierte Abbildung. Sei $f = (f_1, \dots, f_m)$ mit $f_i \in \mathbb{C}[T_1, \dots, T_n]$. Die Werte auf $X(\mathbb{R})$ hängen nur von den reellen Polynomen $\mathrm{Re}(f_i)$ ab. Der Graph ist also

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid x \in X(\mathbb{R}), y_i = \mathrm{Re} f_i(x) \text{ für } i = 1, \dots, m\}.$$

Diese Menge ist sogar algebraisch. □

Satz 1.22. *Seien $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$, $Y \subset \mathbb{A}^m_{\mathbb{R}}$ reelle affine Varietäten. Eine reguläre Abbildung $f : X_{\mathbb{C}} \to Y_{\mathbb{C}}$ ist genau dann definiert über $\mathbb{R}$, wenn es Polynome $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{R}[T_1, \dots, T_n]$ gibt, so dass $f = (f_1, \dots, f_m)$.*
Insbesondere ist $\mathrm{Mor}_{\mathbb{R}}(X, \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}) = \mathcal{O}(X)$.

Beweis: Ohne Einschränkung ist $Y = \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$, also $f \in \mathbb{C}[\underline{T}]$, genauer, $f \in \mathbb{C}[\underline{T}]/I(X_{\mathbb{C}})$. Nach Voraussetzung ist

$$f(\overline{x}) = \overline{f(x)}$$

für alle $x \in X_{\mathbb{C}}$. Wir schreiben $f = g + ih$ mit $g, h \in \mathbb{R}[\underline{T}]$. Dann gilt

$$f(\overline{x}) = g(\overline{x}) + ih(\overline{x})$$

und

$$\overline{f(x)} = \overline{g(x) + ih(x)} = g(\overline{x}) - ih(\overline{x})$$

da komplexe Konjugation ein Körperhomomorphismus ist und die Koeffiziente von g und h in $\mathbb{R}$ liegen. Aus dem Vergleich folgt

$$h(\overline{x}) = -h(\overline{x})$$

auf ganz $X_{\mathbb{C}}$. Hieraus folgt $h \in I(X_{\mathbb{C}})$. Die Abbildung f wird also auch durch das reelle Polynom g definiert. Zwei solche Polynome definieren genau dann dieselbe Abbildung, wenn ihre Deferenz in $\mathbb{R}[\underline{T}] \cap I(X_{\mathbb{C}}) = I(X)$ liegt. □

Bemerkung. Die Kategorie der reellen affinen Varietäten ist also äquivalent zur Kategorie der reduzierten endlich erzeugten $\mathbb{R}$-Algebren. In Schemasprache: Es handelt sich um die Kategorie der reduzierten affinen $\mathbb{R}$-Schemata von endlichem Typ.

Inhaltsverzeichnis