Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut

Reinterpretation geometrischer Motive in der h-Topologie

Diplomarbeit im Diplomstudiengang Mathematik

Überarbeitete Fassung

Leipzig, 16. Dezember 2005

vorgelegt von Jakob Scholbach
geb. am 20. Januar 1983

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Reinterpretation geometrischer Motive mit Hilfe der h-Topologie. Der Ausgangspunkt war ein Einbettungssatz von Voevodsky, welcher die Kategorie geometrischer effektiver Motive als Teilkategorie der effektiven motivischen Komplexe charakterisiert:

$$\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff,tr}} \subset \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{Nis,tr}}.$$

Wir definieren Variationen der genannten Kategorien ohne die Verwendung von Korrespondenzen bzw. Transfers und zeigen ein analoges Einbettungsresultat im Fall von rationalen Koeffizienten über einem Körper der Charakteristik null. Aufbauend auf Kohomologie-Vergleichssätzen für Garben mit Transfers beweisen wir die Äquivalenz der beiden Kategorien effektiver motivischer Komplexe. Der Ziel- und Höhepunkt der Arbeit ist schließlich die Äquivalenz der geometrischen Motive mit und ohne Transfers:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff,tr}} \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\cong"] & \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{Nis,tr}} \arrow[d, "\cong"] \\
\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}} \arrow[r, "\subset"] & \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{h}}
\end{tikzcd}$$

Folgende wesentlichen Änderungen wurden gegenüber der ersten Fassung vorgenommen: Die Einleitung wurde anstelle von [Lev] mehr an [Jan] angelehnt, der Beweis von Satz 2.2 ist nun wesentlich ausführlicher. Lemma 2.18, Lemma 2.26, Lemma 3.16, Lemma 3.19, Theorem 3.17, Theorem 5.6, Theorem 5.8, Bemerkung 5.9 wurden korrigiert und/oder ausführlicher formuliert. Lemma 5.7 wurde neu eingefügt. Die Arbeit wurde um eine englische Einführung ergänzt.

Introduction

The principal aim of this paper is to give an alternative description of Voevodsky's category of geometrical motives without using correspondences. Over a base field of characteristic zero and with rational coefficients we obtain an equivalence of Voevodsky's category and a similar one, which is constructed by the h-topology.

Ever since the creation of singular homology by Poincaré, the philosophy of describing geometrical objects in terms of linear algebra has met with success. Aiming at a classification of objects of geometrical type, different cohomology theories have been created. Each reflects different structural aspects of the objects in question. Examples include the ℓ-adic cohomology of algebraic schemes, de Rham cohomolgy of differentiable manifolds or singular cohomology of topological spaces. Considering the case of smooth algebraic varieties over a field $k \subset \mathbb{C}$, these invariants are all applicable and agree up to canonical isomorphisms. Common properties of these invariants, like the homotopy invariance or the existence of Mayer-Vietoris sequences hint that there should be a more general principle behind these theories. More specifically, the *motive* of a variety should encode these cohomological data. One seeks to construct a category **MM** of *mixed motivs*, such that every reasonable cohomology theory comes from motivic cohomology [Jan, §4]. This category is yet to be constructed. But a category **DM** having the desired properties of the derived category $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{MM})$ has been constructed [Han, Lev, Voe3]. The so-called category of *geometrical motives* was used by Voevodsky to prove the Milnor conjecture.

We define a category of *effective geometrical motives* with rational coefficients as follows: Let **Sch** denote the category of separated schemes of finite type over a field k. Let $\mathbb{Q}\mathbf{Sch}$ be the $\mathbb{Q}$-linear hull of **Sch** (i.e. morphisms are given by $\mathbb{Q}$-linear combinations of morphisms of schemes) and $\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus}$ its closure under direct sums. Starting with smooth schemes we similarly define $\mathbb{Q}\mathbf{Sm}$. Finally let $\mathbf{K}^{-}(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus})$ denote the homotopy category of complexes bounded above. We formally invert the following complexes:

- $X \times \mathbb{A}^1 \to X$, $X \in \mathbf{Sm}$
- Čech nerves of h-coverings: $... \to U \times_X U \to U \to X$, for U smooth, $X \in \mathbf{Sch}$, $U \to X$ a h-covering.

The h-topology is essentially given by Zariski open coverings, finite surjective morphisms and blowups. Now, we define the category of *effective geometrical motives* to be the pseudo-abelian hull of the localization

$$\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}}(\mathbb{Q}) := \left(\mathbf{K}^-\left(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus}\right) / \left\{\mathbb{A}^1, \text{h-coverings}\right\}\right)_+ .$$

Parallely, we consider Voevodsky's category of effective geometrical motives [Voe3]. The first step is to construct the category $\mathbb{Q}\mathbf{SmCor}$, consisting of smooth schemes over k and morphisms given by finite correspondences, i.e. $\mathbb{Q}$-linear combinations of cycles $W \subset X \times Y$ finite over X. An example of a correspondence is the graph of a morphism of smooth schemes. One obtains an additive category $\mathbb{Q}\mathbf{SmCor}$ alongwith a faithful functor $\mathbb{Q}\mathbf{Sm} \to \mathbb{Q}\mathbf{SmCor}$. We similarly define

$$\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff,tr}}(\mathbb{Q}) := \left(\mathbf{K}^-\left(\mathbb{Q}\mathbf{SmCor}^{\oplus}\right) / \left\{\mathbb{A}^1, \text{Mayer-Vietoris}\right\}\right)_+ .$$

Mayer-Vietoris complexes are given by $U \cap V \to U \sqcup V \to U \cup V$ (U, V smooth). Note, that the category just defined differs from the one in [Voe3] as we use complexes bounded above instead of just bounded complexes. This enables us to prove the principal theorem of this paper (5.8):

Let k be of characteristic zero. Then there is an equivalence of categories of effective motives with and without transfers:

$$\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}}(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff,tr}}(\mathbb{Q}).$$

This theorem is a considerable simplification of geometrical motives, as morphism groups are easier to calculate. Moreover, the new category contains all schemes and the h-topology permits greater flexibility.

Overview of the proof: A principal notion of this paper are *presheaves with transfers*. These are just contravariant functors $\mathbf{SmCor} \to \mathbf{Ab}$. A presheaf is called homotopy invariant, if the canonical map $F(X) \to F(X \times \mathbb{A}^1)$ is an isomorphism.

The general idea is to refine the topology to get rid of the correspondences. The h-topology is a good candidate for this task: firstly, every h-sheaf has a canonical transfer structure (3.5). Secondly, for a homotopy invariant presheaf with transfers with rational coefficients, the sheafification with respect to the Zariski-, Nisnevich-, étale, cdh-, qfh- or h-topology agree (3.21). Moreover, its cohomologies with respect to these topologies agree, too.

Using these cohomology comparison results, we obtain the embedding theorem 4.11:

$$\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}} \subset \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{h}},$$

where the category of *effective motivic complexes* $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{h}}$ is by definition the full subcategory of $\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}))$ consisting of complexes with homotopy invariant cohomology-h-sheaves. Using Nisnevich sheaves with transfers instead of h-sheaves, we analogously define the category of *effective motivic complexes with transfers* $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{Nis,tr}}$.

Using the cohomology comparison results and facts on h-sheaves, we prove an equivalence (5.6)

$$\mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{h}} \cong \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{Nis,tr}}.$$

The above equivalence and the embedding theorems 4.11 and 5.4 permit to embed the two categories of geometric effective motives into $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{h}}$. Finally, we show that the subcategories agree to complete the proof.

The restriction to zero characteristic is essentially for resolution of singularities (however, see 5.9). We work with $\mathbb{Q}$-coefficients in order to ensure the finiteness of the cohomological dimension and the equality of Nisnevich and étale cohomologies. Another technical point is 3.16, which is used to close the gap – essentially due to finite surjective morphisms – between Nisnevich and qfh-topology. We do not expect analogous results for sheaves with $\mathbb{Z}$-coefficients to be true.

The proof of the theorem relies on results and techniques developed by Friedlander, Suslin and Voevodsky, especially for the cohomology comparison results and sheaves with transfers. The precursor for the embedding theorem 4.11 (and its proof) is [Voe3, Theorem 3.2.6].

It turned out that the transfer structure of an h-sheaf is uniquely determined. This insight is due to my supervisor A. Huber-Klawitter and substantially simplifies the proofs. I shall undertake these simplifications shortly.

Kapitel 1

Einführung

Ziel dieser Arbeit ist eine Umformulierung der Kategorie geometrischer Motive mit rationalen Koeffizienten über einem Körper der Charakteristik null unter Vermeidung endlicher Korrespondenzen.

Wie die Geschichte zeigt, hat die Strategie der „Linearisierung“ geometrischer Objekte seit der Geburtsstunde der singulären Homologie viele Erfolge ermöglicht. Mit dem Ziel einer Klassifizierung von Objekten geometrischer Natur wurden im Zuge dessen verschiedene Kohomologien definiert. Beispiele dafür sind die singuläre (Ko-)Homologie topologischer Räume, die de-Rham-Kohomologie komplexer Mannigfaltigkeiten oder die ℓ-adische Kohomologie algebraischer Schemata. Die entstehenden Invarianten sind, wenn ihre gemeinsame Anwendbarkeit gegeben ist – wie im Fall glatter algebraischer Varietäten über einem Körper $k \subset \mathbb{C}$ – durch Isomorphismen verknüpft. Die Übereinstimmung der Eigenschaften der genannten Kohomologie-Theorien wie Homotopie-Invarianz, d.h. $\mathrm{H}^*_{\mathrm{sing}}(X) \cong \mathrm{H}^*_{\mathrm{sing}}(X \times \mathbb{A}^1)$, oder die Existenz von Mayer-Vietoris-Sequenzen lassen vermuten, daß diese verschiedenen Theorien einem allgemeineren Prinzip gehorchen.

Man vermutet die Existenz eines *Motivs* für jede glatte Varietät, welches die verschiedenen Kohomologien verknüpft. Genauer sucht man die Kategorie **MM** der *gemischten Motive* über einem Körper k, welche unter anderem folgende Eigenschaften erfüllt [Jan, §4]:

1. Es existiert ein kontravarianter Funktor $M : \mathbf{Sm}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{MM})$, welcher jeder glatten Varietät X ihr Motiv $M(X)$ zuordnet.

2. Die Kategorie **MM** ist eine *abelsche*, $\mathbb{Q}$-rationale Tensorkategorie. Sie enthält ausgezeichnete Objekte (die sog. Tate-Objekte) $\mathbb{Q}(n)$, $n \in \mathbb{Q}$.

3. Der Funktor M erfüllt die Künneth-Formel, Poincaré-Dualität. Es existieren Spurabbildungen sowie Zykelabbildungen, die gewissen Kompatibilitätsbedingungen mit Chowgruppen genügen.

4. Die *motivische Kohomologie* $\mathrm{H}^p_\mu(X, \mathbb{Q}(q)) := \mathrm{Ext}^p_{\mathbf{MM}}(\mathbb{Q}(0), M(X) \otimes \mathbb{Q}(q))$

stimmt mit motivischer Kohomologie, wie sie durch algebraische K-Theorie definiert wird, überein.

5. Die Kategorie der Grothendieck-Motive ist eine volle Teilkategorie von **MM**.

Ein Funktor mit den Eigenschaften 1 bis 3 und 5 ist bis auf einen nicht-kanonischen Isomorphismus bereits eindeutig festgelegt. Die Kategorie **MM** ist zum gegenwärtigen Zeitpunkt noch nicht konstruiert. Sowohl die Mächtigkeit als auch die Schwierigkeit dieser Materie erhellt z.B. die Tatsache, daß die tiefliegenden (von Deligne auf anderem Wege bewiesenen) Weil-Vermutungen unter Verwendung der Eigenschaften der étalen Kohomologie eine formale Konsequenz einer solchen Theorie der Motive wären.

Eine realisierte Etappe ist die Konstruktion einer triangulierten Kategorie **DM**, welche die erwarteten Eigenschaften der abgeleiteten Kategorie $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{MM})$ hat. **DM** wurde von Levine [Lev], Hanamura [Han] und Voevodsky [Voe3] auf jeweils unterschiedliche Weise konstruiert. Schon diese abgeschwächte Version von Motiven, die als Kategorie der *geometrischen Motive* bezeichnet wird, ist eine nützliche Errungenschaft: sie bildeten ein wesentliches Hilfsmittel im Beweis der Milnor-Vermutung durch Voevodsky. Wir verweisen auf die zitierten Arbeiten sowie den sehr inspirierenden Übersichtsartikel [Ser] für eine weitergehende Einführung in dieses Gebiet.

Wir definieren die Kategorie *geometrischer Motive* mit rationalen Koeffizienten wie folgt: Bezeichne $\mathbb{Q}\mathbf{Sch}$ bzw. $\mathbb{Q}\mathbf{Sm}$ die natürliche $\mathbb{Q}$-lineare „Hülle" von **Sch** bzw **Sm**, d.h. Morphismen sind $\mathbb{Q}$-lineare Kombination von Abbildungen von (glatten) Schemata, $\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus}$ den Abschluß unter beliebigen direkten Summen, sowie $\mathbf{K}^{-}(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus})$ die Homotopiekategorie nach oben beschränkter Komplexe. Füge zu dieser Homotopiekategorie formale Inverse folgender Komplexe hinzu:

- $\mathbb{A}^1$-Komplexe: $X \times \mathbb{A}^1 \to X \ (X \in \mathbf{Sm})$
- Čech-Nerven von h-Überdeckungen: $\ldots \to U \times_X U \to U \to X$ mit $U \in \mathbf{Sm}, X \in \mathbf{Sch}$, $U \to X$ eine h-Überdeckung.

Die Kategorie der effektiven geometrischen Motive ist definiert als pseudo-abelsche Hülle dieser Lokalisierung:

$$\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}}(\mathbb{Q}) := \left(\mathbf{K}^{-}(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus})/\{\mathbb{A}^1, \text{h-Überdeckungen}\}\right)_{+}.$$

Dem stellen wir nun Voevodskys Kategorie effektiver geometrischer Motive gegenüber [Voe3]. Betrachte die Kategorie **SmCor**: Objekte sind glatte Schemata endlichen Typs über k; Morphismen sind sog. endliche Korrespondenzen $X \to Y$, d.h. $\mathbb{Q}$-lineare Kombinationen von Zykeln $W \subset X \times Y$, die endlich über X sind. Beispielsweise ist der Graph Γ_f eines gewöhnlichen Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata eine Korrespondenz. Man definiert eine assoziative Verknüpfung von Korrespondenzen, so daß man eine additive Kategorie $\mathbb{Q}\mathbf{SmCor}$ sowie einen treuen Funktor $\mathbb{Q}\mathbf{Sm} \to \mathbb{Q}\mathbf{SmCor}$ erhält. Ähnlich wie oben bildet man

$$\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff,tr}}(\mathbb{Q}) := \left(\mathbf{K}^{-}(\mathbb{Q}\mathbf{SmCor}^{\oplus})/\left\{\mathbb{A}^1, \text{Mayer-Vietoris}\right\}\right)_{+},$$

wobei Mayer-Vietoris-Komplexe durch $U \cap V \to U \sqcup V \to U \cup V$ (U und V glatt) gegeben sind. Die so definierte Kategorie weicht von [Voe3] insofern ab, daß in ihr beliebige nach oben beschränkte Komplexe enthalten sind.
Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist das folgende Theorem:

Sei k ein Körper von Charakteristik null. Dann besteht eine Äquivalenz der Kategorien effektiver geometrischer Motive mit und ohne Transfers:

$$\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}}(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff,tr}}(\mathbb{Q}).$$

Dieses Theorem (5.8) vereinfacht die Handhabung geometrischer Motive wesentlich, da man nun auf den Kalkül der Korrespondenzen verzichten kann.

Wir verknüpfen die Beweisskizze des Theorems mit einer Inhaltsübersicht dieser Arbeit:

- Kapitel 2 ist eine Wiederholung wichtiger Begriffe aus der algebraischen Geometrie und der homologischen Algebra. Wir axiomatisieren die Auflösung von Singularitäten, die eine wichtige Rolle spielt, erinnern an den Garbenbegriff (unter Verwendung von Sieben), definieren dann verschiedene Grothendieck-Topologien, insbesondere die h-Topologie, welche für uns zentral ist. h-Überdeckungen sind durch universelle topologische Epimorphismen definiert (siehe Definition 2.13). Anschließend sammeln wir einige einfache Tatsachen über die Lokalisierung von Kategorien, insbesondere im Zusammenhang mit abgeleiteten Kategorien von Prägarben und Garben, und Eigenschaften der pseudo-abelschen Hülle.

- Kapitel 3 ist Garben mit Transfers gewidmet. Unter Garben mit Transfers verstehen wir Garben auf glatten Schemata, die zusätzlich funktoriell bzgl. Korrespondenzen sind. In einigen Fällen sprechen wir auch bei Garben auf **Sch** - d.h. auch auf singulären Schemata - von Garben mit Transfers. Wir definieren zunächst die Kategorie der endlichen Korrespondenzen (Definition 3.1), anschließend den Begriff der (Prä-)Garben mit Transfers. Eine Prägarbe F heißt Homotopie-invariant, wenn die kanonische Abbildung $F(X) \to F(X \times \mathbb{A}^1)$ ein Isomorphismus ist.

  Der erste Baustein im Beweis des Theorems ist Lemma 3.5: jede h-Garbe trägt in kanonischer Weise Transfers. Es folgt ein Turm von Vergleichsresultaten: Sei F eine Homotopie-invariante Prägarbe mit Transfers. Sei t eine der folgenden Topologien: Zariski-, Nisnevich-, étale, cdh-, qfh-, h-Topologie. Dann sind alle Kohomologien der Garbifizierungen von F bezüglich dieser Topologie ebenfalls Homotopie-invariant und tragen Transferstruktur. Hierbei sind die Aussagen bzgl. der ersten vier Topologien (Theoreme 3.9, 3.10, 3.11, 3.12) Ergebnisse von Friedlander, Suslin und Voevodsky, die beiden letzten (Theoreme 3.14, 3.17) - sie sind nur für $\mathbb{Q}$-Vektorraumgarben gültig - sind eigene Ergebnisse, die sich jedoch eng an bereits bestehende Techniken anlehnen und Voevodsky offenbar bekannt waren.

- Das Ziel von Kapitel 4 ist der Beweis des Einbettungssatzes 4.11. Wir definieren die Kategorie der *effektiven motivischen Komplexe* als volle Teilkategorie der abgeleiteten Kategorie von h-Garben auf **Sch**, welche alle Komplexe enthält, deren Kohomologie-h-Garben Homotopie-invariant sind:

$$\mathbf{DM}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff},-} \subset \mathbf{D}^{-}(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch})).$$

  Der Beweis des Einbettungssatzes lehnt sich eng an den eines analogen Resultats von Voevodsky an. Das zentrale Hilfsmittel ist hierbei Satz 4.9, welcher wiederum auf den obigen Vergleichsresultaten fußt. Er charakterisiert $\mathbf{DM}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff},-}$ als Lokalisierung von $\mathbf{D}^{-}(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}))$ bezüglich $\mathbb{A}^1$-Komplexen. Daraus und aus den Vergleichsresultaten von Kapitel 3 erhalten wir Theorem 4.11:

  Es besteht eine volle Einbettung der Kategorie geometrischer effektiver Motive ohne Transfers in die Kategorie effektiver motivischer Komplexe ohne Transfers:

$$\mathbf{DM}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{gm},-} \subset \mathbf{DM}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff},-}.$$

- Das fünfte Kapitel ist schließlich die Zusammenfassung aller vorigen Resultate. Zunächst erinnern wir an die Definitionen Voevodskys (Definitionen 5.1, 5.3). *Grosso modo* ist die zentrale Idee wie folgt zu umschreiben: Voevodsky definiert geometrische Motive und effektive motivische Komplexe mittels glatter Korrespondenzen und der Nisnevich-Topologie. Wir verfeinern dies zur h-Topologie, können dann aber auf die Forderung an die Garben, Transfers zu besitzen, verzichten, da jede h-Garbe Transfers besitzt (Lemma 3.5). Da wir die Kohomologie-Vergleichsresultate nur für $\mathbb{Q}$-Vektorraumgarben beweisen können, müssen wir uns auf Motive mit rationalen Koeffizienten beschränken. Die Richtigkeit des analogen Resultats für Torsionskoeffizienten ist nicht zu erwarten.

  Wir zeigen dann die Äquivalenz der beiden Kategorien effektiver motivischer Komplexe mit rationalen Koeffizienten (Theorem 5.6):

$$\mathbf{DM}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff},-} \cong \mathbf{DM}_{\mathrm{Nis,tr}}^{\mathrm{eff},-}.$$

  Die Kombination dieser Aussage, sowie der beiden Einbettungssätze (Theorem 4.11 und dem Analagon mit Transfers 5.4) gestattet die Interpretation der beiden geometrischen effektiven Kategorien als Teilkategorien von $\mathbf{DM}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff},-}$. Schließlich zeigen wir, daß die beiden Teilkategorien übereinstimmen, d.h. daß eine Äquivalenz von Kategorien vorliegt.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Algebraische Geometrie

Sei k ein zunächst beliebiger Grundkörper. „Schema" soll stets separiertes Schema endlichen Typs über Spec k heißen. Die Kategorie der Schemata bezeichnen wir mit **Sch**, die der glatten Schemata von endlichem Typ über k mit **Sm**. Als generelle Referenz zur algebraischen Geometrie dient [Har, insbes. Abschnitt III.10].

Die Einschränkung auf das Basisschema Spec k wird gestatten, gewisse Aussagen über Zykel zu treffen (vgl. 3.5). Wesentlich ist außerdem die Auflösung von Singularitäten. Aus diesem Grund schränken wir uns zu gegebener Zeit auf einen Körper der Charakteristik 0 ein (vgl. z.B. 3.12, 3.17).

2.1.1 Auflösung von Singularitäten

Definition 2.1. • Wir verwenden die Sprechweise „k gestattet die schwache Auflösung von Singularitäten", falls gilt: Für jedes Schema $X \in$ **Sch** gibt es ein *glattes* Schema Y und einen eigentlichen surjektiven Morphismus $Y \longrightarrow X$.

- Wir sagen „k gestattet die starke Auflösung von Singularitäten", falls zusätzlich gilt: Für jedes glatte Schema X über k und jede abstrakte Aufblasung $p : Y \longrightarrow X$ mit (abgeschlossenem) Zentrum $Z \subset X$ (d.h. jede eigentliche surjektive Abbildung, so daß $p^{-1}(X-Z) \cong X-Z$) gibt es eine endliche Folge von Aufblasungen in *glatten* Unterschemata $q : \widetilde{X} = X_n \to \dots \to X_0 = X$, so daß q durch p faktorisiert:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[d] \arrow[dr, "q"] & \\ Y \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$

Satz 2.2. *Falls k von Charakteristik 0 ist, gestattet k die starke Auflösung von Singularitäten. Falls k von positiver Charakteristik ist, gestattet k die schwache Auflösung von Singularitäten.*

Beweis: Zur schwachen Auflösung siehe [Hir1, Main Theorem I, S. 132] (char $k = 0$) und [Jon, Theorem 4.1; Abschnitt 1] (char $k > 0$).

Die starke Auflösung erfolgt mit der sog. Eliminierung von Fundamentalpunkten (*elimination of indeterminacies*). Es gilt folgendes Theorem für char $k = 0$: Sei $f : X \to Y$ eine birationale Abbildung projektiver Schemata und $U \subset X$ eine offene Teilmenge, so daß die Einschränkung von f auf U ein Isomorphismus ist. Dann gibt es einen Morphismus $g : X' \to X$, der sich als endliche Komposition von Aufblasungen in *glatten* Zentren darstellen läßt, so daß $g \circ f : X' \to Y$ ein Morphismus ist. Die Zentren der Aufblasungen sind zu U disjunkt. Diese Aussage wurde im analytischen Kontext von Hironaka bewiesen [Hir2]. Die Aussage ist auch im algebraischen Kontext, d.h. für Schemata gültig [AKML, §1.2.4], siehe auch [RG, Corollaire 5.7.12]. Das Theorem gilt auch für $f : X \to Y$ eigentlich, X, Y nicht notwendigerweise projektiv [Bon, §1.2].

Dies wenden wir nun auf p^{-1} an. Die Abbildung ist auf $X - Z$ definiert und dort ein Isomorphismus, also eine birationale Abbildung. Obiges Theorem liefert einen Morphismus $q : \widetilde{X} \to X$ der postulierten Gestalt. Zunächst gilt $p \circ p^{-1} \circ q = q$ auf $q^{-1}(X - Z)$. Da alle Schemata vereinbarungsgemäß separiert sind, sind die Graphen der beiden Morphismen abgeschlossen. Da $\widetilde{X}$ wie X reduziert ist, handelt es sich bei den Graphen um reduzierte Unterschemata von $\widetilde{X} \times X$. Es reicht also zu zeigen, daß die beiden Graphen als topologische Räume übereinstimmen. Die Teilmenge von $\widetilde{X}$, wo $p \circ p^{-1} \circ q \neq q$ gilt, ist offen. Wäre sie nicht leer, würde sie die dichte offene Menge $q^{-1}(X - Z) \subset \widetilde{X}$ schneiden. Ein Widerspruch, also gilt $\Gamma_{p \circ p^{-1} \circ q} = \Gamma_q$. Dies war zu zeigen. □

2.1.2 Exzellente Schemata

In einigen Beweisen werden wir den Begriff des *exzellenten* Schemas verwenden (2.16, 3.14, 3.16). Wir werden verwenden, daß Schemata in **Sch** exzellent sind [EGA4, Scholie 7.8.3.(iii), Proposition 7.8.6.]. Für ein exzellentes ganzes affines Schema Spec A betrachten wir die Normalisierung Spec $\widetilde{A}$ in einer endlichen Körpererweiterung L des Quotientenkörpers $k(A)$. Dann ist Spec $\widetilde{A}$ endlich über Spec A (siehe [EGA4, Scholie 7.8.3.(vi)] oder [Eis, Corollary 13.13] für endlich erzeugte ganze k-Algebren A).

2.1.3 Garben

Die Kategorie der effektiven motivischen Komplexe baut auf dem Garbenbegriff auf. Daher schildern wir nun die für uns wesentlichen Garben-Definitionen.

Definition 2.3. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

- Die Kategorie der *Prägarben* $\mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ ist die Kategorie der Funktoren $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to$ **Ens**. Prägarben abelscher Monoide, abelscher Gruppen etc. sind analog definiert.

- $\mathcal{C}$ wird in den Anwendungen oft eine additive Kategorie sein. Insbesondere verfügt $\mathcal{C}$ dann über endliche direkte Summen (z.B. für $\mathcal{C} = \mathbb{Q}\mathbf{Sch}$ oder $\mathcal{C} = \mathbf{SmCor}$ ist $- \oplus - := - \sqcup -$). Verfügt auch die Zielkategorie über endliche direkte Summen, sprechen wir von einer *additiven Prägarbe*, wenn für alle $X, Y \in \mathcal{C}$ die kanonische Abbildung

$$F(X \oplus Y) \xrightarrow{\cong} F(X) \oplus F(Y)$$

ein Isomorphismus ist.

- Eine *Prätopologie* t auf $\mathcal{C}$ ist die Angabe einer Klasse von Familien von Morphismen $\{f_i : U_i \longrightarrow U\}_{i \in I}$, der *Überdeckungen*, welche folgende Forderungen erfüllen:

  - Jeder Isomorphismus ist eine Überdeckung.
  - Für jede Überdeckung $\{f_i : U_i \longrightarrow U\}$ und jeden beliebigen Morphismus $f : U' \to U$ existiert die durch Basiswechsel erhaltene Familie $\{f_i' : U_i \times_U U' \longrightarrow U'\}$ und ist eine Überdeckung.
  - Für Überdeckungen $\{f_{ij} : U_{ij} \longrightarrow U_i\}_j$ und $\{f_i : U_i \longrightarrow U\}_i$ ist die Komposition $\{f_i \circ f_{ij} : U_{ij} \longrightarrow U\}$ wieder eine Überdeckung.

- Eine *t-Garbe* (bzgl. einer Prätopologie t) ist eine Prägarbe, so daß für jedes Objekt $X \in \mathcal{C}$ und jede t-Überdeckung $\{f_i : U_i \longrightarrow X\}$ folgende Sequenz exakt ist:

$$0 \to F(X) \to \prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \times_X U_j).$$

Die volle Teilkategorie in $\mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ der t-Garben wird mit $\mathbf{Shv}_t(\mathcal{C})$ bezeichnet, z.B. $\mathbf{Shv}_{\text{ét}}(\mathbf{Sch})$. Prägarben und Garben mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$-Vektorräumen werden als $\mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathbb{Q})$ bzw. $\mathbf{Shv}_t(\mathcal{C}, \mathbb{Q})$ bezeichnet.

Wir werden auch Garben bzgl. sehr feiner Topologien auf glatten Schemata benötigen, für die die obige Garbendefinition *à la*

$$0 \to F(X) \to \prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \times_X U_j)$$

nicht mehr möglich ist, weil $U_i \times_X U_j$ im allgemeinen nicht mehr glatt ist, selbst wenn X und die U_i glatt sind. Daher erinnern wir an eine allgemeinere Garbendefinition und stellen den Zusammenhang der verschiedenen Definitionen her. Wir verzichten hier auf den Formalismus der Universen, da wir es stets mit essentiell kleinen Kategorien zu tun haben werden.

Definition 2.4. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, z.B. $\mathbf{Sm}$ oder $\mathbf{Sch}$. Wir bezeichnen das Bild eines $X \in \mathcal{C}$ unter der Yoneda-Einbettung $\mathcal{C} \to \mathbf{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Ens})$ mit R_X.

- Sei $X \in \mathcal{C}$. Ein *Sieb* R ist ein Subfunktor von R_X (d.h. $R(V) \subset R_X(V)$ für alle $V \in \mathcal{C}$; $R \to R_X$ ist eine natürliche Transformation von Funktoren). Für jeden Morphismus $v : Y \to X$ und ein Sieb R von X bezeichnen wir mit $v^{-1}(R)$ das Urbild von R unter v, d.h. $v^{-1}(R)(V) := \{f : V \to Y, v \circ f \in R(V)\}$.

- Eine *Topologie* auf $\mathcal{C}$ ist die Angabe einer Klasse von Sieben $J(X)$ für jedes $X \in \mathcal{C}$, der sog. *bedeckenden Siebe*, so daß folgende Forderungen erfüllt sind:

  1. Für alle $R \in J(X)$ und $v : Y \to X$ ist $v^{-1}(R) \in J(Y)$.
  2. Sei $R \in J(X)$, R' ein beliebiges Sieb von X, $v : Y \to X \in R(V)$ beliebig, und es gelte $v^{-1}(R) \in J(Y)$. Dann folgt $R' \in J(X)$.
  3. $X \in J(X)$.

  Die Kategorie $\mathcal{C}$ versehen mit einer Topologie heißt dann auch *Situs*.

- Sei $\mathcal{C}$ ein Situs.

  Eine Prägarbe F heißt *Garbe*, falls für jedes bedeckende Sieb $R \in J(X)$ die natürliche Abbildung

  $$\mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathcal{C})}(R_X, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathcal{C})}(R, F)$$

  eine Bijektion ist. Morphismen von Garben sind als Morphismen von Prägarben definiert. Die Kategorie der Garben auf $\mathcal{C}$ wird als $\mathbf{Shv}(\mathcal{C})$ (oder $\mathbf{Shv}_t(\mathcal{C})$, wenn die Topologie t spezifiziert werden soll) bezeichnet.

Man beachte, daß in dieser Definition die Existenz von Faserprodukten in $\mathcal{C}$ nicht vorausgesetzt wird. Es ist leicht zu sehen, daß für eine Familie von Topologien $\{t_i\}_{i\in I}$ der Durchschnitt dieser Topologien (d.h. $J(X) := \cap_i J_i(X)$) wieder eine Topologie ist.

Wir ordnen einer Prätopologie $\widetilde{t}$ in folgender Weise eine Topologie t zu. Sei $\widetilde{t}$ durch eine Klasse von Familien von Überdeckungen $\left\{\{X_i^{(\alpha)} \to X^{(\alpha)}\}_{i\in I^{(\alpha)}}\right\}_{\alpha\in A}$ gegeben. Betrachte für jedes α die Familie $\mathcal{T}_\alpha$ der Topologien, für die

$$J_\alpha(X^{(\alpha)})(V) := \left\{f : V \to X^{(\alpha)}, f \text{ faktorisiert über ein } X_i^{(\alpha)}\right\}$$

bedeckende Siebe sind. Definiere t_α als Durchschnitt aller Topologien in $\mathcal{T}_\alpha$. Die zu $\widetilde{t}$ *assoziierte Topologie* t ist dann als Durchschnitt der t_α definiert.

Lemma 2.5. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, die mit einer Prätopologie $\widetilde{t}$ versehen ist, und F eine Prägarbe auf $\mathcal{C}$. Bezeichne t die zu $\widetilde{t}$ assoziierte Topologie. Dann sind äquivalent:*

- *F ist eine Garbe bzgl. der Prätopologie $\widetilde{t}$.*
- *F ist eine Garbe bzgl. der Topologie t.*

Beweis: [SGA4, Bd. 1, Exposé II, Corollaire 2.4.] □

Das Lemma rechtfertigt also die Verwendung der gleichen Notationen für die Garbenkategorien. In Anbetracht des Lemmas wäre es nicht unbedingt nötig, die folgenden Resultate auch im Kontext von Prätopologien zu formulieren. Bereits an der Konstruktion des Garbifizierungsfunktors zeigt sich jedoch die bessere Handhabbarkeit von Garben bzgl. einer Prätopologie:

Satz 2.6. *Sei $\mathcal{C}$ ein Situs, d.h. eine Kategorie versehen mit einer Topologie t. Der Vergiß-Funktor* $\mathbf{Shv}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ *hat einen exakten linksadjungierten Funktor*

$$a : \mathbf{PSh}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Shv}(\mathcal{C}), F \mapsto a(F) =: F_t.$$

Die zu einer Prägarbe F assoziierte Garbe in einer Topologie t wird als F_t bezeichnet, z.B. $F_{\mathrm{Nis}}, F_{\mathrm{Zar}}$ etc.

Beweis: Falls $\mathcal{C}$ sogar mit einer Prätopologie t versehen ist, wird die Garbe $a(F)$ folgendermaßen konstruiert (siehe z.B. [Mil, Theorem 2.11.]) : Zunächst bildet man eine Prägarbe F', indem Schnitte von F miteinander identifiziert werden, wenn es eine t-Überdeckung gibt, so daß die Einschränkungen der beiden Schnitte übereinstimmen. Dann setzt man $a(F)(X) := \varinjlim \mathrm{H}^0(\mathcal{U}, F')$ (Kolimes über alle t-Überdeckungen $\mathcal{U} = \{U_i \to X\}$, wobei $\mathrm{H}^0(\mathcal{U}, F') := \{s_i \in F'(U_i), s_i|_{U_i \times_X U_j} = s_j|_{U_i \times_X U_j} \in F'(U_i \times_X U_j)\}$.

Für den Beweis im allgemeinen Fall (d.h. für eine beliebige Topologie, die nicht notwendigerweise durch eine Prätopologie induziert ist) siehe [SGA4, Bd. 1, Exposé II, Théorème 3.4.]. Die Exaktheit des Funktors wird in [SGA4, Bd. 1, Exposé II, Théorème 4.1.] bewiesen. □

Definition 2.7. Sei $\mathbb{Q}\mathbf{Sch}$ die „$\mathbb{Q}$-lineare Hülle" von $\mathbf{Sch}$: Objekte sind Schemata und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\mathbf{Sch}}(X,Y) := \oplus_i \mathbb{Q}[\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X_i, Y)]$, wobei $X = \sqcup_i X_i$ die Zerlegung von X in Zusammenhangskomponenten ist. Es handelt sich um eine Kategorie, da das Bild einer Zusammenhangskomponente wieder zusammenhängend ist.

Wir fassen hierbei das leere Schema $\emptyset = \mathrm{Spec}\ 0$ als Schema mit der Konvention $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\mathbf{Sch}}(\emptyset, X) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\mathbf{Sch}}(X, \emptyset) = \emptyset$ auf. Damit handelt es sich um eine additive Kategorie mit $\emptyset$ als Nullobjekt. $\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus}$ bezeichne den Abschluß von $\mathbb{Q}\mathbf{Sch}$ unter direkten Summen, siehe Definition 2.22. Analog definieren wir $\mathbb{Z}\mathbf{Sch}$, $\mathbb{N}\mathbf{Sch}$. Hierbei verstehen wir $\mathbb{N}$ stets als abelschen Monoid, d.h. 0 sei Element von $\mathbb{N}$.

Bemerkung 2.8. Alle hier betrachteten Prägarben sind additive Prägarben (d.h. $F(X \sqcup Y) \cong F(X) \oplus F(Y)$). Betrachtet man die Topologie t, deren Überdeckungen durch disjunkte Vereinigungen der Zusammenhangskomponenten eines Schemas

$$\bigsqcup X_i \longrightarrow X, X_i \subset X \text{ zusammenhängend}$$

gegeben sind, sind die additiven Prägarben genau die t-Garben.

Für $X \in \mathbf{Sch}$ werden die (additiven) Prägarben $\mathbb{Z}(X)$ und $\mathbb{N}(X)$ definiert durch $\mathbb{Z}(X)(V) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbf{Sch}}(V, X) = \oplus_i \mathbb{Z}[\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(V_i, X)]$ mit der Zerlegung $V = \sqcup_i V_i$ in Zusammenhangskomponenten, $\mathbb{N}(X)(V) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{N}\mathbf{Sch}}(V, X)$.

Bemerkung 2.9. Offenbar gilt

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(X), F) = \mathrm{Hom}(\mathbb{N}(X), F) = F(X)$$

für eine (additive) Prägarbe abelscher Gruppen F, wobei sich der erste Hom-Term auf die Kategorie der Prägarben abelscher Gruppen, der zweite auf die der Prägarben abelscher Monoide (jeweils auf **Sch**) bezieht. Hierbei sind die beiden zueinander inversen Abbildungen wie folgt gegeben: Einem Element $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(X), F)$ wird das Bild ϕ von $\mathrm{Id}_X \in \mathbb{Z}(X)(X)$ unter der Abbildung $\psi(X) : \mathbb{Z}(X)(X) \to F(X)$ zugeordnet. Umgekehrt ordnet man $\phi \in F(X)$ den Morphismus $\psi(V) : \mathbb{Z}(X)(V) \to F(V)$ zu, der durch

$$\psi(V) : a = (a_i) \mapsto \oplus\, a_i^*(s) \in \oplus F(V_i) \cong F(V)$$

gegeben ist, wobei $V = \sqcup V_i$ die Zerlegung in Zusammenhangskomponenten und $a_i \in \mathbb{Z}(X)(V_i)$ ist. Nach obigem Satz gilt für eine t-Garbe F

$$F(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}}(\mathbb{Z}(X), F) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}_t}(\mathbb{Z}_t(X), F) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}}(\mathbb{Z}_t(X), F).$$

Betrachten wir die Einbettung $\mathbf{Sm} \to \mathbf{Sch}$ und versehen wir **Sch** mit einer Prätopologie t, bezüglich derer jedes nicht notwendig glatte Schema X eine t-Überdeckung $U \to X$ mit *glattem* U aufweist. Bezeichne u die feinste Topologie auf **Sm**, so daß die Einschränkungen aller t-Garben auf **Sch** u-Garben auf **Sm** sind. Diese Topologie existiert, sie wird als *induzierte Topologie* bezeichnet [SGA4, Bd. 1, Exposé III, 3.1.].

Lemma 2.10. *Mit diesen Notationen ist der offensichtliche Funktor*

$$\mathbf{Shv}_t(\mathbf{Sch}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_u(\mathbf{Sm})$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis: [SGA4, Bd. 1, Exposé II, Théorème 4.1] □

Bemerkung 2.11.
- Man beachte, daß die Forderung an t z.B. für die cdh-Topologie und die h-Topologie erfüllt ist, siehe 2.1 und 2.13.
- Sei t eine Topologie auf **Sch**, für welche sich die obige Äquivalenz von Kategorien ergibt (z.B. die cdh- oder die h-Topologie, 2.13). Sei u auf **Sm** wie eben definiert. Für jede Prägarbe F auf **Sm** sei F_u die u-Garbifizierung von F auf **Sm**. Dann bezeichnen wir mit F_t das Bild von F_u unter der obigen Äquivalenz von Garbenkategorien. Der Garbifizierungsfunktor ist exakt (Satz 2.6), demnach auch der Funktor $F \mapsto F_t$.

2.1.4 Étale- und Nisnevich-Topologie

Definition 2.12. Ein Morphismus von Schemata heißt *étale*, falls er lokal von endlichem Typ, flach und unverzweigt ist.

Surjektive Familien étaler Morphismus bilden die Überdeckungen der *Étale-Topologie*.

Eine surjektive Familie étaler Morphismen $\{f_i : U_i \longrightarrow X\}$ heißt Überdeckung der *Nisnevich-Topologie*, wenn gilt: für alle $x \in X$ gibt es ein i und ein $u_i \in U_i$ mit $f_i(u_i) = x$, so daß der induzierte Morphismus der Restklassenkörper $k(x) \longrightarrow k(u_i)$ ein Isomorphismus ist.

Aus den Standardeigenschaften étaler Morphismen folgt, daß dies Prätopologien im Sinne von 2.3 auf **Sch** oder auf **Sm** sind [Mil, Proposition 3.3.].

2.1.5 h-Topologien

Die (qf)h-Topologie wurde von Voevodsky in [Voe1] definiert.

Definition 2.13. Ein Morphismus von Schemata $f : X \longrightarrow Y$ heißt *topologischer Epimorphismus*, falls der Y zugehörige topologische Raum ein Quotientenraum vom X zugehörigen topologischen Raum ist, d.h. falls f surjektiv ist, und A in X offen ist genau dann, wenn $f(A)$ in Y offen ist. f heißt *universeller topologischer Epimorphismus*, wenn für jeden Morphismus $Y' \longrightarrow Y$ auch die Projektion $X' = Y' \times_Y X \longrightarrow Y'$ ein topologischer Epimorphismus ist.

Die Überdeckungen der *h-Topologie* **Sch** sind nach Definition endliche Familien $\{f_i : U_i \longrightarrow X\}$ von Morphismen endlichen Typs mit der Eigenschaft, daß

$$\sqcup f_i : \sqcup U_i \longrightarrow X$$

ein universeller topolgischer Epimorphismus ist. Sind die Morphismen f_i zusätzlich quasiendlich, spricht man von einer Überdeckung der *qfh-Topologie*. Es folgt jeweils unmittelbar aus den Definitionen, daß es sich um (Prä-)Topologien handelt.

Die *cdh-Topologie* ist die minimale Grothendieck-Topologie, die Nisnevich-Überdeckungen und Morphismen folgenden Typs enthält:

$$Y \sqcup Z \xrightarrow{p \sqcup i} X,$$

wobei $i : Z \longrightarrow X$ eine abgeschlossene Einbettung ist und $p : Y \longrightarrow X$ ein eigentlicher Morphismus, so daß $p^{-1}(X - Z) \longrightarrow X - Z$ ein Isomorphismus ist.

2.1.6 Eigenschaften der h-Topologien

Definition 2.14. *Normale qfh-Überdeckungen* $\{f_i : U_i \longrightarrow X\}$ sind qfh-Überdeckungen mit einer Faktorisierung $f_i = f \circ j_i$, wobei $\{j_i : U_i \longrightarrow U\}$ eine Zariski-Überdeckung offener Teilmengen und $f : U \longrightarrow X$ ein endlicher surjektiver Morphismus ist.

Eine Familie von Morphismen $\{f_i : U_i \longrightarrow X\}$ heißt *normale h-Überdeckung*, falls eine Faktorisierung $f_i = b \circ f \circ j_i$ existiert, wobei die $\{j_i : U_i \longrightarrow U\}$ eine offene Überdeckung bilden, $f : U \longrightarrow X_Z$ ein endlicher surjektiver Morphismus und $b : X_Z \longrightarrow X$ die Aufblasung von X in einem abgeschlossenen Teilschema Z ist.

Bemerkung 2.15. Für eine normale h-Überdeckung eines reduzierten Schemas X der obigen Gestalt ist Z notwendigerweise eine echte Teilmenge von X. Andernfalls bezeichne I die Idealgarbe, bzgl. derer aufgeblasen wird. Da X reduziert ist, implizierte $X = Z = V(I)$, daß die Garbe I verschwindet, daher wäre $X_Z = \mathbf{Proj}(\oplus_{n=0}^{\infty} I^n) = \emptyset$ im Widerspruch zur Surjektivität von h-Überdeckungen.

Satz 2.16. *Jede qfh-Überdeckung eines glatten Schemas besitzt eine normale qfh-Überdeckung als Verfeinerung. Jede h-Überdeckung eines Schemas besitzt eine normale h-Überdeckung als Verfeinerung.*

*Unter der Annahme, daß k die schwache Auflösung von Singularitäten (Definition 2.1) gestattet, gibt es für jedes $X \in$ **Sch** eine h-Überdeckung durch ein glattes Schema.*

Beweis:

- In [Voe1, Theorem 3.1.9] wird die Aussage für die h-Topologie sogar für exzellente Schemata bewiesen. Schemata endlichen Typs über k sind exzellent.

- Sei $p_i : U_i \longrightarrow X$ eine qfh-Überdeckung. Im Beweis von *loc. cit.* wird folgende Aussage gezeigt: es gibt eine normale qfh-Verfeinerung dieser Überdeckung, wenn X normal und zusammenhängend ist und die p_i dominant und quasiendlich sind. Glatte Schemata sind stets normal, und ohne Einschränkung kann man X als zusammenhängend annehmen. Seien q_j jene Morphismen $p_i : U_i \longrightarrow X$, die dominant sind. Dann bilden auch die q_j eine Überdeckung von X [Voe1, Proposition 3.1.4]. Daher ist die Dominanzbedingung im Beweis von [Voe1, Theorem 3.1.9] stets erfüllbar, ferner sind nach Definition der qfh-Topologie die q_j quasiendlich. Dies ergibt die gewünschte Aussage.

- Die dritte Aussage folgt aus der Gestalt der Auflösung von Singularitäten (2.1) und der Definition der h-Topologie.

□

Die disjunkte Vereinigung der irreduziblen Komponenten eines Schemas ist eine cdh-Überdeckung. Aufblasungen in abgeschlossenen, nicht notwendig glatten Zentren sind cdh-Überdeckungen. Diese Eigenschaft ergibt eine Äquivalenz von cdh-Garben auf **Sch** mit gewissen Garben auf **Sm** (siehe Lemma 2.10).

Offenbar hat man folgende Relationen von Topologien auf **Sch** ($t \subseteq t'$ gibt an, daß t' feiner als t ist, d.h. daß jede t-Überdeckung eine t'-Überdeckung ist):

$$\mathrm{Zar} \subseteq \mathrm{Nis} \subseteq \text{ét} \subseteq \mathrm{qfh} \subseteq \mathrm{h},$$

$$\mathrm{Nis} \subseteq \mathrm{cdh} \subseteq \mathrm{h}.$$

Die Inklusion ét $\subseteq$ qfh folgt aus der Tatsache, daß étale Morphismen als flache Morphismen endlichen Typs offen sind [Mil, Theorem 2.12].

2.1.7 Hyperüberdeckungen

Wir führen nun den Begriff der Hyperüberdeckung ein. Hyperüberdeckungen lassen sich als Verallgemeinerung des Čech-Nervs

$$... \to U \times_X U \times_X U \to U \times_X U \to U \to X$$

einer Überdeckung $U \longrightarrow X$ auffassen, wo in jedem Term anstelle von U_X^n eine Verfeinerung von U_X^n steht. Diese Konstruktion ist für uns wichtig, da bei einer h-Überdeckung (siehe 2.13) eines glatten Schemas X durch ein glattes Schema U das Faserprodukt $U \times_X U$ nicht notwendig glatt ist. Die (schwache) Auflösung von Singularitäten wird dann die Existenz einer glatten h-Hyperüberdeckung sichern, indem jeder Term sukzessive durch ein glattes Schema verfeinert wird. Für eine detaillierte Einführung von Hyperüberdeckungen siehe [SGA4, Bd. 2, Exposé V, Abschnitt 7]. Dort wird der Begriff der Hyperüberdeckung für Prägarben eingeführt. Wir benötigen jedoch nur den Fall repräsentierbarer Prägarben, schränken die Definition daher entsprechend ein.

Definition 2.17. Der Kürze halber werde der Situs $S = (\mathbf{Sch}/X)_t$ (**Sch** versehen mit einer Topologie t) als S bezeichnet.

- Sei $\mathbf{\Delta}$ die simpliziale Kategorie (Objekte sind endliche Mengen $\mathbf{n} = \{0, ..., n\}$, $n \geq 0$, Morphismen sind monoton steigende Abbildungen). $\mathbf{\Delta}_{\leq n}$ bezeichne die volle Teilkategorie von $\mathbf{\Delta}$, welche $\mathbf{m}$ für $m \leq n$ enthält. Die Kategorie $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}S$ der kontravarianten Funktoren von $\mathbf{\Delta}$ nach S wird als Kategorie der simplizialen Schemata bezeichnet. $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}_{\leq n}S$ ist analog definiert. Für ein $\mathcal{X} \in \mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}S$ setze $\mathcal{X}_n := \mathcal{X}(\mathbf{n}) \in S$.

- Der Funktor, der ein simpliziales Schema auf die ersten n Terme einschränkt, wird mit
$$i_n^* : \mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}S \longrightarrow \mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}_{\leq n}S$$
bezeichnet. Er hat einen rechtsadjungierten Funktor i_{n*} [SGA4, Bd. 1, Exposé I, Proposition 5.1.]. Das n-te *Koskelett* eines simplizialen Schemas $\mathcal{X}$ wird als
$$\mathrm{cosk}_n\mathcal{X} := i_{n*}i_n^*\mathcal{X}$$
definiert.

- Ein simpliziales Schema $\mathcal{X}$ heißt *Hyperüberdeckung*, falls gilt: Für alle $n \geq 0$ ist $\mathcal{X}_{n+1} \longrightarrow (\mathrm{cosk}_n\mathcal{X})_{n+1}$ eine Überdeckung und $\mathcal{X}_0 \longrightarrow *$ ist eine Überdeckung in S, wobei $*$ das finale Element in S ist (also X im Fall $S = \mathbf{Sch}/X$).

- Für ein simpliziales Schema $\mathcal{X}$ bezeichne $\mathbb{Z}(\mathcal{X})$ den folgenden Komplex repräsentierbarer Prägarben:
$$... \longrightarrow \mathbb{Z}(\mathcal{X}_2) \xrightarrow{\delta_2} \mathbb{Z}(\mathcal{X}_1) \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{Z}(\mathcal{X}_0),$$
wobei $\delta_n = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\partial_n^i$ und $\partial_n^i : \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}_{n-1}$ die i-te Randabbildung des simplizialen Schemas ist. Dieser Komplex wird auch als *Moore-Komplex* von $\mathcal{X}$ bezeichnet.

- Für einen Morphismus $U \to X$ bezeichnen wir mit $\mathcal{U}_X$ das simpliziale Schema $... \to U_X^3 \to U_X^2 \to U$ (wobei die Randabbildungen durch Projektionen, die Entartungen durch „partielle Diagonalabbildungen" gegeben sind), mit $\mathbb{Z}(\mathcal{U}_X)$ den assoziierten Moore-Komplex. Beispielsweise ist für jede Überdeckung $U \to X$ bzgl. einer Prätopologie t das simpliziale Schema $\mathcal{U}_X$ eine t-Hyperüberdeckung von X.

Lemma 2.18. • *Sei $\mathcal{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Hyperüberdeckung in $(\mathbf{Sch}/X)_t$, t eine beliebige Topologie. Der augmentierte Moore-Komplex der jeweiligen repräsentierbaren t-Garben $\mathbb{Z}_t(\mathcal{X})$ ist exakt:*

$$... \to \mathbb{Z}_t(\mathcal{X}_2) \to \mathbb{Z}_t(\mathcal{X}_1) \to \mathbb{Z}_t(\mathcal{X}_0) \to \mathbb{Z}_t(X) \to 0.$$

• *Sei ein beliebiger Morphismus $U \xrightarrow{f} X$ gegeben. Dann ist der Komplex*

$$\mathbb{Z}(\mathcal{U}_X) \to \mathbb{Z}(X) \to \operatorname{coker} \mathbb{Z}(f) \to 0$$

exakt (als Komplex von Prägarben*).*

Beweis: In [SGA4, Bd. 2, Exposé V, Théorème 7.3.2(3)] wird folgende Aussage bewiesen: Sei $\mathcal{X}$ eine Hyperüberdeckung in $(\mathbf{Sch}/X)_t$. Dann ist die t-Garbifizierung folgender Sequenz exakt:

$$... \to \mathbb{Z}_X(\mathcal{X}_2) \to \mathbb{Z}_X(\mathcal{X}_1) \to \mathbb{Z}_X(\mathcal{X}_0) \to \mathbb{Z}_X(X) = \mathbb{Z} \to 0,$$

wobei $\mathbb{Z}_X(U)(V) := \mathbb{Z}[\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}/X}(V,U)]$. Der Beweis in *loc. cit.* läßt sich auf unsere Situation übertragen, indem man die dort verwendeten Garben $\mathbb{Z}_{X,t}(-)$ durch $\mathbb{Z}_{\mathrm{Spec}\ k,t}(-) = \mathbb{Z}_t(-)$ ersetzt.

Zum Beweis der zweiten Aussage gehen wir wie folgt vor: Sei A ein beliebiges zusammenhängendes Schema. $(A,-)$ bzw. $[A,-]$ bezeichne der Kürze halber $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(A,-)$ bzw. $\mathbb{Z}(-)(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbf{Sch}}(A,-)$. Wir zeigen zunächst, daß die Sequenz

$$[A,\mathcal{U}_X] = \mathbb{Z}(\mathcal{U}_X)(A) = \mathbb{Z}((A,\mathcal{U}_X)) : ... \to [A,U_X^3] \to [A,U_X^2] \to [A,U]$$

exakt ist. Dazu können wir annehmen, daß (A,U) nicht leer ist, denn sonst liegt der Nullkomplex vor. Sei $* \in (A,U)$ ein beliebiger Morphismus; dieser wird uns als Basispunkt für die Berechnung von Homotopiegruppen dienen. Betrachte die simpliziale Menge

$$(A,\mathcal{U}_X) : ... \to (A,U_X^3) \to (A,U_X^2) \to (A,U).$$

Es folgt unmittelbar aus der Definition der Homotopiegruppen

$$p_n := \pi_n\left((A,\mathcal{U}_X),*\right)$$

und der Universalitätseigenschaft des kartesischen Produkts, daß $p_n = 0$, sobald $n \geq 1$ ist (siehe [GJ, Abschnitt I.7.] für die Definition der Homotopiegruppen simplizialer Mengen, die hier vorliegenden simplizialen Mengen sind Kan-Komplexe). Die nullte Homotopiemenge p_0 ist ein Quotient von (A,U): Morphismen $f,g : A \to U$ werden identifiziert, wenn es ein $h : A \to U \times_X U$ gibt, so daß $f = pr_1 \circ h$, $g = pr_2 \circ h$. Betrachte den simplizial konstanten Komplex $\mathcal{Q} = (p_0)_{n\geq 0}$ (d.h. in jedem Grad liegt p_0, die Randabbildungen und Entartungen sind durch Identitäten gegeben). Offensichtlich ist $\pi_n(\mathcal{Q}) = 0$ für $n \geq 1$, $\pi_0(\mathcal{Q}) = p_0$. Demnach ist der kanonische Morphismus von simplizialen

Mengen $(A, \mathcal{U}_X) \to \mathcal{Q}$ eine schwache Äquivalenz im Sinne von [GJ, Abschnitt I.7., Seite 32]. Daraus folgt [GJ, Proposition III.2.16., Corollary III.2.7.], daß der Morphismus der assoziierten Moore-Komplexe $[A, \mathcal{U}_X] \to \mathbb{Z}(\mathcal{Q})$ ein Quasi-Isormorphismus ist, d.h. die behauptete Exaktheit folgt.

Ferner ist folgende Sequenz exakt

$$[A, U_X^2] \overset{pr_1 - pr_2}{\longrightarrow} [A, U] \overset{f}{\longrightarrow} [A, X] \to \operatorname{coker} f \to 0.$$

Die Exaktheit an der Stelle $[A, U]$ folgt hierbei aus der Definition des Faserprodukts: Sei ein $s = \sum_{i \in I} n_i \cdot s_i \in [A, U]$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $s_i : A \to U$ gegeben, welches unter f auf 0 abgebildet wird. Dann gibt es für jeden Index i mindestens einen weiteren Index i', so $f \circ s_i = f \circ s_{i'}$ gilt. Die Universalitätseigenschaft des Faserprodukts ergibt einen Morphismus $g : A \to U \times_X U$, so daß $g \in [A, U_X^2]$ unter $pr_1 - pr_2$ auf $s_i - s_{i'}$ abgebildet wird. Ohne Einschränkung können wir das Ausgangselement s um den Rand $n_i \cdot (s_i - s_{i'})$ abändern. Mittels dieses Vorgehens verringert man die Kardinalität von I sukzessive auf 2. Dann ist $s = n \cdot s_1 - n \cdot s_2$, $f \circ s_1 = f \circ s_2$ und wieder gibt es $g \in [A, U_X^2]$, so daß $n \cdot g \mapsto s$, d.h. die Exaktheit gilt.

Aus diesen beiden exakten Teilstücken ergibt sich die zweite Behauptung des Lemmas. $\square$

Bemerkung 2.19. Die zweite Aussage des Lemmas ist für beliebige Hyperüberdeckungen anstelle von $\mathcal{U}_X$ im allgemeinen falsch.

Beweis: Wähle eine t-Überdeckung $U_0 \overset{u_0}{\to} X$. $\mathcal{U}_0 := \{U_0\}$ ist eine 0-abgeschnittene Hyperüberdeckung von X im Sinne von [Del, 5.1.1]. Wähle eine t-Überdeckung $U_1 \overset{u_1}{\to} U_0 \times_X U_0 = \operatorname{cosk}(\mathcal{U}_0)_1$. Dann ist mit $v_m := pr_m \circ u_1$, $m = 1, 2$

$$\mathcal{U}_1 : U_1 \sqcup U_0 \to U_0 \to X$$

eine 1-abgeschnittene Hyperüberdeckung [Del, 6.2.5], wobei die beiden Randabbildungen $U_1 \sqcup U_0 \to U_0$ durch $v_m \sqcup \mathrm{Id}_{U_0}$, $m = 1, 2$ gegeben sind. (Der Term U_0 im linken Teil wurde lediglich hinzugefügt, um eine Entartungsabbildung für das simpliziale Schema definieren zu können). Dieser Prozeß läßt sich fortsetzen, vgl. *loc. cit.* Man erhält eine Hyperüberdeckung von X, deren letzte Terme durch

$$\ldots \to U_1 \sqcup U_0 \to U_0 \to X$$

gegeben sind. Im Fall der uns interessierenden h-Topologie wählen wir nun $u_0 : U_0 := \mathbb{P}^1 \to X := \operatorname{Spec} k$ und für $U_1 \overset{u_1}{\longrightarrow} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ einen Morphismus, so daß weder v_1 noch v_2 einen Schnitt besitzt, z.B. $u_1 : U_1 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $(z, w) \mapsto (z^2, w^2)$. Dies ist (z.B. für $k = \mathbb{C}$) eine endliche surjektive Abbildung, also eine h-Überdeckung. Betrachte nun den Moore-Komplex dieses simplizialen Schemas:

$$\ldots \to [\mathbb{P}^1, U_1 \sqcup \mathbb{P}^1] \to [\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1] \to [\mathbb{P}^1, \operatorname{Spec} k] \to \operatorname{coker} \mathbb{Z}(u_0) \to 0.$$

Betrachte das Element $+1 \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^1} - 1 \cdot (x \mapsto -x) \in \mathbb{Z}(\mathbb{P}^1)(\mathbb{P}^1)$, welches offensichtlich im Kern von $\mathbb{Z}(u_0)$ liegt. Angenommen, es läge im Bild der vorigen Abbildung, d.h. es gäbe $f = \sum_i n_i \cdot g_i + \sum_j m_j \cdot h_j$, so daß $g_i : \mathbb{P}^1 \to U_1$, $h_j : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, $n_i, m_j \in \mathbb{Z}$ mit

$$\sum n_i \cdot pr_1 \circ u_1 \circ g_i - \sum n_i \cdot pr_2 \circ u_1 \circ g_i \stackrel{!}{=} \mathrm{Id} - (x \mapsto -x).$$

Dann gäbe es ein i, so daß $pr_k \circ u_1 \circ g_i = v_k \circ g_i = \mathrm{Id}$, $k \in \{1, 2\}$, was der Wahl von u_1 widerspricht. □

Definition 2.20. Wir bezeichnen eine Hyperüberdeckung $\mathcal{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als *glatt*, wenn alle ihre Glieder X_n glatt sind.

Lemma 2.21. *k gestatte die schwache Auflösung von Singularitäten. Für jedes Schema $X \in$* **Sch** *gibt es eine glatte h-Hyperüberdeckung von X.*

Beweis: Siehe [Del, 6.2.5]. Die Idee des Beweises ist eine sukzessive Verfeinerung von ... $\to (X_1)^3_X \to X_1 \times_X X_1 \to X_1 \to X$ durch glatte Schemata. □

2.2 Homologische Algebra

Als generelle Referenz zur homologischen Algebra dienen [Wei] und [GM].

Ab bezeichne die Kategorie der abelschen Gruppen, $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{D})$ die Kategorie der kontravarianten Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$. Für eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ sei $\mathbf{Kom}^*(\mathcal{A})$, $* \in \{+, -, \mathrm{b}\}$ die Kategorie der nach oben, nach unten beschränkten und beschränkten Komplexe mit Differentialen vom Grad $+1$. $\mathbf{K}^*(\mathcal{A})$ sei die zugehörige Homotopiekategorie, sowie $\mathbf{D}^*(\mathcal{A})$ die abgeleitete Kategorie. Für einen Doppelkomplex C^{**} bezeichne $\mathrm{Tot}\,(C^{**})$ den Totalkomplex (siehe [Wei, 1.2.6] für die Wahlen der Vorzeichen).

Wir erinnern daran, daß eine Kategorie *trianguliert* heißt, falls es einen Automorphismus $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ und eine Familie von *ausgezeichneten Dreiecken* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A)$ gibt, so daß eine Liste von 4 Forderungen erfüllt sind [Wei, Definition 10.2.1]. Beispielsweise ist für jede additive Kategorie $\mathcal{A}$ die Homotopiekategorie $\mathbf{K}^*(\mathcal{A})$ trianguliert. Die ausgezeichneten Dreiecke sind hierbei durch Dreiecke gegeben, welche isomorph zu

$$X \xrightarrow{f} Y \to \mathrm{cone}\ f \to X[1]$$

sind [Wei, Corollary 10.2.5].

Definition 2.22. Für eine (essentiell) kleine additive Kategorie $\mathcal{C}$ betrachten wir die Yoneda-Einbettung $h : \mathcal{C} \subset \mathbf{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab})$ und bezeichnen den Abschluß von $\mathcal{C}$ unter beliebigen direkten Summen in $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab})$ mit $\mathcal{C}^{\oplus}$. Für eine Menge von Objekten $\{X_i\}_{i \in I}$ bezeichnen wir der Kürze halber $\oplus_i h_{X_i} =: \oplus X_i$. Diese Konstruktion werden wir auf $\mathbb{Q}$**Sch** oder **SmCor** anwenden (siehe Definition 2.7 für die Definition von $\mathbb{Q}$**Sch**).

Definition 2.23. Sei X ein Schema und G eine t-Garbe. Die n-te Kohomologie $\mathrm{H}_t^n(X,G)$ ist definiert als die n-te Kohomologiegruppe des Komplexes $\Gamma(X)(I^*)$, wobei $\Gamma(X)$ der globale Schnittfunktor auf X ist und I^* eine injektive Auflösung von G in $\mathbf{Shv}_t$ ist [Mil, Definition III.1.5.] – $\mathbf{Shv}_t(\mathbf{Sch})$ hat genügend injektive Objekte [Mil, Proposition III.1.1.]. Die n-te Hyperkohomologie $\mathbb{H}_t^n(X,F^*)$ eines Komplexes von t-Garben F^* ist die n-te Kohomologie des Komplexes $\Gamma(X)(\mathrm{Tot}\ (I^{**}))$, wobei $F^* \longrightarrow I^{**}$ eine injektive Cartan-Eilenberg-Auflösung von F^* ist [Wei, 5.7.9, 5.7.10].

Definition 2.24. Die $\mathbb{Q}$-*kohomologische Dimension* eines Schemas X bezüglich einer Topologie t ist definiert als das Minimum aller $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so daß für jede t-Garbe von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen F gilt:

$$\mathrm{H}_t^m(X,F) = 0 \text{ für alle } m > n.$$

Lemma 2.25. *Sei $t \in \{\mathrm{Zar}, \mathrm{Nis}, \text{ét}, \mathrm{qfh}, \mathrm{h}\}$. So ist die $\mathbb{Q}$-kohomologische Dimension eines jeden normalen Schemas (von endlichem Typ über k) endlich.*

Beweis: Für die Zariski- und Nisnevich-Topologie gilt dies sogar für beliebige Schemata und Garben abelscher Gruppen [Har, Theorem III.2.7], [Nis, Theorem 1.32], für étale Garben von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen folgt es aus der Übereinstimmung von étaler und Nisnevich-Kohomologie [MVW, Proposition 14.15.]; für qfh-Garben mit rationalen Koeffizienten folgt es aus der Übereinstimmung von étaler und qfh-Kohomologie, [Voe1, Theorem 3.4.1]; [Voe1, Theorem 3.4.6] ergibt die Aussage für h-Garben. Wir verweisen auf [GL] für eine Aussage über die kohomologische Dimension im Fall beliebiger (nicht notwendig $\mathbb{Q}$-rationaler) Garben. □

Lemma 2.26. *Sei $X \in \mathbf{Sm}$, F^* ein nach oben beschränkter Komplex in $\mathbf{Shv}_t(\mathbf{Sch})$, $n \in \mathbb{Z}$. Ferner nehmen wir an, daß die $\mathbb{Q}$-kohomologische Dimension glatter Schemata endlich ist. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_t(\mathbf{Sch}))}(\mathbb{Z}_t(X), F^*[n]) = \mathbb{H}_t^n(X,F^*).$$

Beweis: Für beschränkte Komplexe gilt dies mit nicht notwendigerweise endlicher kohomologischer Dimension [Wei, 10.6.8, Theorem 10.7.4]. Im allgemeinen Fall benötigt man endliche kohomologische Dimension, vgl. [MVW, Exercise 6.25] für eine analoge Aussage für Garben mit Transfers. □

2.2.1 Lokalisierung von Kategorien

Definition 2.27. Eine volle Teilkategorie $\mathcal{D}$ einer triangulierten Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *dick*, falls sie eine triangulierte, unter direkten Summanden abgeschlossene Unterkategorie von $\mathcal{C}$ ist (d.h. für jedes ausgezeichnete Dreieck $A \to B \to C \to T(A)$ mit zwei der drei Objekte in $\mathcal{D}$ liegt auch das dritte in $\mathcal{D}$ und für jedes $A \oplus B$ in $\mathcal{D}$ sind auch A und B in $\mathcal{D}$). Diese Definition ist äquivalent zur ursprünglichen Definition von Verdier [Ric, Proposition 1.3.].

Eine dicke, unter beliebigen existierenden direkten Summen abgeschlossene Teilkategorie heißt *lokalisierend*.

Definition 2.28. Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie, S eine Klasse von Morphismen aus $\mathcal{C}$. Eine *Lokalisierung* von $\mathcal{C}$ bezüglich S ist eine Kateogire $\mathcal{C}[S^{-1}]$ und ein Funktor $q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$, so daß gilt

- Für jeden Morphismus $s \in S$ ist $q(s)$ ein Isomorphismus in $\mathcal{C}[S^{-1}]$.
- Jeder Funktor $q' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, so daß für alle $s \in S$ der Morphismus $q'(s)$ ein Isomorphismus ist, faktorisiert in eindeutiger Weise über q:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "q'"'] & \mathcal{C}[S^{-1}] \arrow[d, "\exists\,!"] \\ & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

Sei $\mathcal{C}$ eine additive, triangulierte Kategorie und $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ eine triangulierte Teilkategorie. Dann ist die Lokalisierung $\mathcal{C}/\mathcal{D}$ definiert als $\mathcal{C}[S^{-1}]$, wobei S die Klasse von Morphismen aus $\mathcal{C}$ ist, deren Kegel in $\mathcal{D}$ liegt. Falls $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ sogar eine dicke Teilkategorie ist, ist S ein sog. multiplikatives System von Morphismen [Wei, Definition 10.3.4].

Es gibt zwei Möglichkeiten, die Existenzfrage der Lokalisierung zu behandeln. Entweder man läßt zu, daß die Hom-Klassen der Lokalisierung nicht notwendigerweise Mengen sind. Dann existiert die Lokalisierung einer triangulierten Kategorie bzgl. einer triangulierten Teilkategorie stets [Nee, Theorem 2.1.8.]. Oder – der klassische Weg – man fordert, daß die Hom-Klassen der Lokalisierung Mengen sind. In diesem Fall ist die Existenz der Lokalisierung im jeweiligen vorliegenden Einzelfall zu beweisen. In den hier vorliegenden Fällen werden wir die Lokalisierung zunächst in ersterem Sinn als existierend annehmen und dann zeigen, daß die Hom-Klassen Mengen sind, d.h. daß die Lokalisierung im klassischen Sinn existiert.

Offensichtlich ist die Lokalisierung einer Kategorie eindeutig bis auf Äquivalenz von Kategorien.

Beispiel 2.29. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Die abgeleitete Kategorie $\mathbf{D}^*(\mathcal{A})$, $* \in \{+, -, \mathrm{b}\}$ ist definiert als Lokalisierung der Kategorie $\mathbf{Kom}^*(\mathcal{A})$ bezüglich des lokalisierenden Systems der Quasi-Isomorphismen von Komplexen.

In den folgenden Aussagen wird die Kategorie **SmCor** aufgeführt. Siehe Abschnitt 3.1 zur Definition dieser Kategorie. Im Moment wird nur benutzt, daß es sich um eine additive Kategorie handelt, deren Objekte die glatten Schemata sind.

Lemma 2.30. *Sei $\mathcal{B}$ entweder $\mathbb{Q}\mathbf{Sm}$, $\mathbb{Q}\mathbf{Sch}$ oder* **SmCor**, *t eine beliebige Topologie auf* **Sm** *bzw.* **Sch**, *$\mathcal{C}$ entweder die Kategorie $\mathbf{K}^-(\mathcal{B}^\oplus)$ oder $\mathbf{D}^-(\mathbf{PSh}(\mathcal{B}))$ oder $\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_t(\mathcal{B}))$ sowie $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ eine lokalisierende, unter Quasiisomorphismen abgeschlossene Teilkategorie. Sei F^* ein (nach oben beschränkter) Komplex in $\mathcal{C}$, so daß für jedes $n \in \mathbb{Z}$ der n-te Term F^n in $\mathcal{D}$ liegt. Dann folgt $F^* \in \mathcal{D}$.*

Beweis: Für $\mathcal{C} = \mathbf{D}^-(\mathbf{PSh}(\mathbf{SmCor}))$ wird die Behauptung im Beweis von [MVW, Lemma 9.3.] gezeigt. Dieser Beweis läßt sich unmittelbar auf die übrigen Fälle $\mathcal{C} = \mathbf{D}^-(\mathbf{PSh}(\mathcal{B}))$ anwenden, da lediglich verwendet wird, daß $\mathcal{B}$ eine kleine additive Kategorie ist. Vollkommen analog ist auch der Beweis im Fall der abgeleiteten Garbenkategorie.

Daraus folgt auch die Behauptung für die Homotopiekategorien: nach Konstruktion existieren die im Beweis in *loc. cit.* verwendeten abzählbaren direkten Summen, ferner sind die Objekte von $\mathbf{K}^-(\mathcal{B}^\oplus)$ termweise projektiv in $\mathbf{D}^-(\mathbf{PSh}(\mathcal{B}))$ [MVW, Lemma 8.1.], es handelt sich also um volle Teilkategorien der abgeleiteten Kategorien [Wei, Theorem 10.4.8]. $\square$

Bemerkung 2.31. Sei eine Inklusion von triangulierten additiven Kategorien $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ gegeben. Dann ist die minimale dicke Teilkategorie $\widetilde{\mathcal{D}}$ von $\mathcal{C}$, die $\mathcal{D}$ enthält, gerade der Kern des Lokalisierungsfunktors $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{D}$ (d.h. die volle Teilkategorie der Objekte $C \in \mathcal{C}$, so daß $F(C) \cong 0_{\mathcal{C}/\mathcal{D}}$), siehe [Nee, Remark 2.1.39.].

Beispiel 2.32. Wir nehmen an, daß k die schwache Auflösung von Singularitäten gestattet. Dann ist die minimale lokalisierende Teilkategorie von $\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_\mathrm{h}(\mathbf{Sch}))$, die alle $\mathbb{Z}_\mathrm{h}(X)$ mit *glattem* X enthält, ganz $\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_\mathrm{h}(\mathbf{Sch}))$. D.h. jeder Garbenkomplex ist quasi-isomorph zu einem Komplex, dessen Terme von der Gestalt $\oplus_{X_i \in \mathbf{Sm}} \mathbb{Z}_\mathrm{h}(X_i)$ sind. Die gleiche Aussage erhält man für die Prägarbenkategorie, wenn man auf die Forderung $X \in \mathbf{Sm}$ verzichtet.

Beweis: Wegen 2.30 genügt es zu beweisen, daß jede h-Garbe F eine Auflösung durch Garben der Form

$$\bigoplus_{X \in \mathbf{Sm}} \mathbb{Z}_\mathrm{h}(X)$$

hat. Dazu reicht es zu zeigen, daß für jede h-Garbe F eine Surjektion der Form

$$\bigoplus_{X \in \mathbf{Sm}} \mathbb{Z}_\mathrm{h}(X) \longrightarrow F$$

existiert. Damit konstruiert man sukzessiv eine Auflösung der postulierten Gestalt.

Jeder Schnitt $a \in F(X)$, $X \in \mathbf{Sm}$ entspricht einem Morphismus $\mathbb{Z}(X) \to F$; da F eine h-Garbe ist, entspricht a sogar einem Morphismus von h-Garben $\mathbb{Z}_\mathrm{h}(X) \to F$. Dies ergibt einen Morphismus

$$\bigoplus_{X \in \mathbf{Sm}, a \in F(X)} \mathbb{Z}_\mathrm{h}(X)^{(a)} \xrightarrow{\oplus a} F.$$

Dieser Morphismus ist in $\mathbf{Shv}_\mathrm{h}(\mathbf{Sch})$ surjektiv, da für jeden Schnitt $b \in F(Y)$ (Y nicht notwendig glatt) eine h-Überdeckung durch ein glattes Schema X existiert und $b|_X$ im Prägarben-Bild des obigen Morphismus liegt. $\square$

Bemerkung 2.33. Ebenso zeigt man, daß die minimale lokalisierende Teilkategorie von $\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_\mathrm{Nis}(\mathbf{SmCor}))$, die alle $\mathbb{Z}_\mathrm{tr}(X)$ mit $X \in \mathbf{Sm}$ enthält, ganz $\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_\mathrm{Nis}(\mathbf{SmCor}))$ ist.

Satz 2.34. *Sei $\mathcal{C}$ ein Situs, z. B.* **Sm** *oder* **Sch** *versehen mit einer Topologie t. Bezeichne $\mathbf{D}^*(\mathbf{PSh}(\mathcal{C}))$ bzw. $\mathbf{D}^*(\mathbf{Shv}_t(\mathcal{C}))$ die abgeleitete Kategorie von Prägarben bzw. t-Garben (abelscher Gruppen). Dann ist die $\mathbf{D}^*(\mathbf{Shv}_t(\mathcal{C}))$ äquivalent zur Lokalisierung von $\mathbf{D}^*(\mathbf{PSh}(\mathcal{C}))$ bezüglich der lokalisierenden Teilkategorie $\mathcal{C}_t$, welche von Prägarben F mit $F_t = 0$ erzeugt wird.*

Beweis: $\mathcal{C}_t$ enthält alle *Komplexe*, deren t-Garbifizierung 0 ist (2.30). Für jeden Morphismus $a : X_a \to Y_a$ in $\mathbf{D}^*(\mathbf{PSh}(\mathcal{C}))$ bezeichne Z_a ein nach den Axiomen triangulierte Kategorien existierendes Objekt der Kategorie, so daß

$$X_a \to Y_a \to Z_a \to X_a[1]$$

ein ausgezeichnetes Dreieck ist. Sei $\Phi : \mathbf{D}^*(\mathbf{PSh}(\mathcal{C})) \to \mathcal{C}'$ ein Funktor, der alle Morphismen a mit $(Z_a)_t \cong 0$ (Isomorphie in $\mathbf{D}^*(\mathbf{Shv}_t(\mathcal{C}))$) auf Isomorphismen abbildet. Gemäß der Universalitätseigenschaft der Lokalisierung haben wir zu zeigen, daß Φ in eindeutiger Weise über $\mathbf{D}^*(\mathbf{Shv}_t(\mathcal{C}))$ faktorisiert, d.h. daß $\Phi(F)$ für jedes F nur von F_t abhängt. Betrachte die exakte Sequenz von Prägarbenkomplexen

$$0 \to F' \to F \to F_t \to F' \to 0,$$

wobei F' und F'' Kern und Kokern des Garbifizierungsmorphismus sind. Sei $a : (0 \to F) \to (F' \to F)$ der Morphismus mit den offensichtlichen Abbildungen. Tot a ist ein Morphismus in $\mathbf{Kom}(\mathbf{PSh}(\mathcal{C}))$, wir können also für $Z_{\mathrm{Tot}\,a}$ den Kegel cone (Tot a) wählen. Wegen cone (Tot a) = Tot (cone a) und $F'_t = 0$ ist $(\text{cone Tot } a)_t = (F_t \oplus 0 \longrightarrow F_t)$ exakt. Demzufolge ist

$$\Phi(F) = \Phi\left(\mathrm{Tot}\, F\right) \cong \Phi\left(\mathrm{Tot}\ (F' \to F)\right),$$

wie auch $\Phi(F_t) \cong \Phi\left(\mathrm{Tot}\ (F_t \to F'')\right)$. Aus dem Quasi-Isomorphismus

$$(F' \to F) \to (F_t \to F'')$$

folgt die Quasi-Isomorphie der entsprechenden Totalkomplexe, damit $\Phi\,(F) \cong \Phi\,(F_t)$, was zu zeigen war. □

Lemma 2.35. *Sei $\mathcal{D}$ eine Kategorie, $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ eine volle Teilkategorie sowie S eine multiplikative Klasse von Morphismen in $\mathcal{D}$. Bezeichne $\mathcal{C}[S^{-1}] := \mathcal{C}[(\mathcal{C} \cap S)^{-1}]$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

- *$\mathcal{C}[S^{-1}] \to \mathcal{D}[S^{-1}]$ ist eine volle Einbettung.*
- *Für jeden Morphismus $C \to D$ aus S mit $C \in \mathcal{C}$ gibt es einen Morphismus $D \to C'$, $C' \in \mathcal{C}$, so daß die Komposisition $C \to C'$ in S ist.*

Beweis: [Wei, Lemma 10.3.13] □

Bemerkung 2.36. Wir werden beim Beweis des Einbettungssatzes 4.11 folgende Situation vorfinden: Sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ eine volle triangulierte Teilkategorie, S eine Menge von Objekten in $\mathcal{C}$. Wir bezeichnen mit $S^{\Delta\mathcal{C}}$ bzw. $S^{\Delta\mathcal{D}}$ die minimale triangulierte Teilkategorie von $\mathcal{C}$ bzw. $\mathcal{D}$, welche S enthält und abgeschlossen unter Isomorphismen ist. Dann gilt $S^{\Delta\mathcal{D}} = \mathcal{C} \cap S^{\Delta\mathcal{D}} = S^{\Delta\mathcal{C}}$ (dies folgt aus der Definition einer triangulierten Teilkategorie: für ein ausgezeichnetes Dreieck $A \to B \to C \to A[1]$ in $\mathcal{D}$ mit $A, B \in \mathcal{C}$ folgt $C \in \mathcal{C}$).

Bezeichne ferner $S^{\text{dick }\mathcal{C}}$ bzw. $S^{\text{dick }\mathcal{D}}$ die minimale dicke Teilkategorie (in $\mathcal{C}$ bzw. $\mathcal{D}$), die S enthält. Dann gilt $S^{\text{dick }\mathcal{D}} \cap \mathcal{C} = S^{\text{dick }\mathcal{C}}$. Betrachte zum Beweis folgendes Diagramm von Kategorien:

$$\begin{tikzcd}
S^{\text{dick }\mathcal{C}} \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\subset"] & \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d, "\subset"] & \mathcal{C}/S^{\Delta\mathcal{C}} \arrow[d] \\
S^{\text{dick }\mathcal{D}} \arrow[r, "\subset"] & \mathcal{D} \arrow[r] & \mathcal{D}/S^{\Delta\mathcal{D}}
\end{tikzcd}$$

Die vollen Einbettungen sind durch $\subset$ gekennzeichnet. In der obigen Behauptung ist nur die Inklusion „$\subset$" zu zeigen, die umgekehrte Inklusion ist trivial. Sei also ein $T \in S^{\text{dick }\mathcal{D}} \cap \mathcal{C}$ gegeben, d.h. ein Objekt aus $\mathcal{C}$, welches auf $0_{\mathcal{D}/S^{\Delta\mathcal{D}}}$ abgebildet wird. Die Behauptung $T \in S^{\text{dick }\mathcal{C}}$ folgt, wenn wir zeigen, daß der rechte vertikale Pfeil ebenfalls eine volle Einbettung ist. Dazu wenden wir Lemma 2.35 an: sei ein ausgezeichnetes Dreieck

$$C \xrightarrow{f} D \to E \to C[1]$$

mit $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$ und $E \in S^{\Delta\mathcal{D}}$ gegeben. Im obigen ausgezeichneten Dreieck sind die Terme C und E aus $\mathcal{C}$. Damit ist auch $D \in \mathcal{C}$, da $\mathcal{C}$ eine triangulierte Teilkategorie von $\mathcal{D}$ ist. Folglich kann man in 2.35 $C' := D$ wählen. Dies ergibt die Behauptung.

Nun nehmen wir zusätzlich an, daß $\mathcal{C}$ abgeschlossen unter direkten Summanden und beliebigen existierenden direkten Summen ist. Dann ist $\mathcal{C}$ eine lokalisierende Teilkategorie von $\mathcal{D}$. In diesem Fall ergibt sich also $S^{\text{dick }\mathcal{C}} = S^{\text{dick }\mathcal{D}}$ und analog $S^{\text{lok }\mathcal{C}} = S^{\text{lok }\mathcal{D}}$ (dies sind die minimalen lokalisierenden Teilkategorien, die S enthalten). Daraus folgt (wieder mit 2.35), daß auch der Funktor $\mathcal{C}/S^{\text{lok }\mathcal{C}} \to \mathcal{D}/S^{\text{lok }\mathcal{D}}$ eine volle Einbettung ist.

Satz 2.37. *k gestatte die schwache Auflösung von Singularitäten, t sei eine beliebige Topologie. $\mathcal{H}$ bezeichne die minimale lokalisierende Teilkategorie von $\mathbf{D}^-(\mathbf{PSh}(\mathbf{Sch}))$, welche folgende Komplexe enthält:*

$$\mathbb{Z}(\mathcal{U}_X) : \ldots \to \mathbb{Z}(U_X^3) \to \mathbb{Z}(U_X^2) \to \mathbb{Z}(U) \to \mathbb{Z}(X),$$

wobei $U \in \mathbf{Sm}$, $X \in \mathbf{Sch}$ und $U \to X$ eine beliebige h-Überdeckung (vgl. 2.17). Der Garbifizierungsfunktor

$$\mathbf{D}^-(\mathbf{PSh}(\mathbf{Sch})) \longrightarrow \mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}))$$

faktorisiert über $\mathbf{D}^-(\mathbf{PSh}(\mathbf{Sch}))/\mathcal{H}$ und induziert eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathbf{D}^-(\mathbf{PSh}(\mathbf{Sch}))/\mathcal{H} \xrightarrow{\cong} \mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch})).$$

Beweis: Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}_{\mathrm{h}}$ die minimale lokalisierende Teilkategorie von $\mathbf{D}^-(\mathbf{PSh}(\mathbf{Sch}))$, die von Prägarben F mit $F_{\mathrm{h}} = 0$ erzeugt wird. Wegen Satz 2.34 reicht es zu zeigen, daß $\mathcal{H} = \mathcal{C}_{\mathrm{h}}$ gilt. Der Garbifizierungsfunktor verwandelt (Hyper-)Überdeckungen in exakte Komplexe (2.18). Demnach ist $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}_{\mathrm{h}}$, d.h. der Funktor existiert. Wir zeigen nun die umgekehrte Inklusion. Wähle einen Komplex in $\mathcal{C}_{\mathrm{h}}$. Man kann ohne Einschränkung annehmen, daß es sich um einen im Grad 0 konzentrierten Komplex handelt (Lemma 2.30), d.h. eine Prägarbe F auf $\mathbf{Sch}$ mit $F_{\mathrm{h}} = 0$. Betrachte die kanonische Auflösung von F durch Prägarben der Form $\oplus_i \mathbb{Z}(X_i)$, $X_i \in \mathbf{Sch}$, welche aus der für eine beliebige Prägarbe F existierenden Surjektion

$$\bigoplus \mathbb{Z}(X_i) \xrightarrow{a_i} F$$

resultiert. Wegen $F_{\mathrm{h}} = 0$ gibt es für jeden Schnitt a_i eine h-Überdeckung $f_i : U_i \to X_i$, so daß $f_i^*(a_i) = 0$; hier kann man ohne Einschränkung annehmen, daß U_i glatt ist (Auflösung von Singularitäten). Es existiert also eine Surjektion von Prägarben auf $\mathbf{Sch}$ $\oplus_i \mathrm{coker}\ \mathbb{Z}(f_i) \to F$ und wegen $(\mathrm{coker}\ \mathbb{Z}(f_i))_{\mathrm{h}} = 0$ auch eine Auflösung von F durch Garben diesen Typs.

Wir können also $F = \mathrm{coker}\ f$ für eine h-Überdeckung $f : U \to X$ annehmen (2.30). Die Sequenz

$$\mathbb{Z}(\mathcal{U}_X) \longrightarrow \mathbb{Z}(X) \longrightarrow \mathrm{coker}\ f \longrightarrow 0.$$

ist exakt (2.18). Die Überdeckung liegt in $\mathcal{H}$, also auch coker f. □

Bemerkung 2.38. Aus dem Beweis folgt, daß man anstelle von $\mathcal{H}$ jede lokalisierende Teilkategorie nehmen kann, die die Komplexe $\mathbb{Z}(\mathcal{U}_X)$ wie in der Behauptung des Satzes enthält und deren Komplexe nach h-Garbifizierung exakt in $\mathbf{Kom}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}))$ sind. Insbesondere kann man auch beliebige h-Hyperüberdeckungen hinzunehmen (Lemma 2.18).

2.2.2 Pseudo-abelsche Kategorien

Eine additive Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *pseudo-abelsch*, wenn jeder Projektor (d.h. jeder Endomorphismus $f : X \to X$ mit $f \circ f = f$) einen Kern in $\mathcal{C}$ hat.

Lemma 2.39. *Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie. Betrachte die folgende Kategorie $\mathcal{C}_+$: Objekte von $\mathcal{C}_+$ sind Paare (X, p), wobei $X \in \mathcal{C}$, p ein Projektor von X ist. Morphismen sind wie folgt definiert:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_+}((X,p),(Y,q)) := q \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \circ p.$$

Dann ist $\mathcal{C}_+$ additiv und pseudo-abelsch und der kanonische Funktor $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_+$ ist eine volle Einbettung. $\mathcal{C}_+$ wird als pseudo-abelsche Hülle *von $\mathcal{C}$ bezeichnet.*

Ferner besteht für jede pseudo-abelsche Kategorie $\mathcal{C}'$ eine Äquivalenz von (additiven) Funktorkategorien

$$\mathbf{Fun}(\mathcal{C}_+, \mathcal{C}') \longrightarrow \mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C}').$$

Beweis: [BS, Proposition 1.3] □

Kapitel 3

Garben mit Transfers

3.1 Endliche Korrespondenzen

In diesem Abschnitt führen wir die Kategorie der endlichen Korrespondenzen auf glatten Schemata **SmCor** sowie den Begriff der Prägarben mit Transfers ein. Anschließend studieren wir die Beziehung von Prägarben mit und ohne Transfers, insbesondere im Zusammenhang mit der h-Topologie. Die Kategorie **SmCor** wurde von Voevodsky eingeführt (siehe z. B. [MVW, insbes. Lecture 1]).

Wir verweisen auf [Ful] für eine Einführung in die Schnitttheorie, welche dem Begriff der Korrespondenzen zugrunde liegt.

Definition 3.1. Seien X und Y glatte Schemata und X zusammenhängend. Eine *elementare Korrespondenz* von einem zusammenhängenden Schema X nach Y ist eine irreduzible, abgeschlossene Teilmenge $W \subseteq X \times Y$, deren assoziiertes ganzes Schema endlich und surjektiv über X ist. Falls X nicht zusammenhängend ist, ist eine elementare Korrespondenz von X nach Y definiert als eine elementare Korrespondenz von einer Zusammenhangskomponente von X nach Y. Die Gruppe der *endlichen Korrespondenzen* $\mathrm{Cor}(X, Y)$ ist definiert als die von den elementaren Korrespondenzen erzeugte freie abelsche Gruppe.

Wir werden eine additive Kategorie $\mathbf{SmCor}(k) = \mathbf{SmCor}$ definieren, deren Objekte glatte Schemata und deren Morphismen endliche Korrespondenzen sind. Ferner konstruieren wir einen kanonischen treuen Funktor $\mathbf{Sm} \longrightarrow \mathbf{SmCor}$.

Jedem abgeschlossenen Teilschema $Z \subseteq X \times Y$, welches endlich und surjektiv über X ist, wird eine endliche Korrespondenz $[Z] \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SmCor}}(X, Y)$ zugeordnet: Falls Z ganz ist, setze $[Z] := Z$. Im allgemeinen Fall setze $[Z] := \sum_i \mathrm{length}(\mathcal{O}_{Z,Z_i}) \cdot Z_i$, wobei die Summe über die irreduziblen Komponenten Z_i von Z läuft, welche surjektiv über X sind. $\mathrm{length}(\mathcal{O}_{Z,Z_i})$ ist hierbei die Länge des lokalen Rings im generischen Punkt von Z_i (aufgefaßt als Modul über sich selbst).

Die Komposition von Morphismen in **SmCor** wird wie folgt definiert: Seien $V \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SmCor}}(X,Y)$, $W \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SmCor}}(Y,Z)$. Wir definieren $W \circ V$ im Fall, daß V und W elementare Korrespondenzen sind und setzen die Definition im allgemeinen Fall linear fort. Seien $V \subseteq X \times Y$, $W \subseteq Y \times Z$ und $\widetilde{V}$, $\widetilde{W}$ die assoziierten ganzen Schemata. Setze $T := (\widetilde{V} \times Z) \cap (X \times \widetilde{W})$ und definiere

$$W \circ V := p_*([T]),$$

wobei p_* der Push-Forward entlang der Projektion $X \times Y \times Z \longrightarrow X \times Z$ ist (siehe [Ful, Abschnitt 1.4] zur Definition des Push-Forwards entlang eines eigentlichen Morphismus). p ist endlich entlang T, d.h. $p : T \to X \times Z$ ist eine endliche Abbildung [MVW, Lemma 1.7], damit eigentlich, d.h. der Push-Forward ist wohldefiniert. Diese Komposition ist assoziativ (siehe [Ful, Proposition 16.1.1.(a)], dort ist die Komposition ohne den Übergang $V \rightsquigarrow \widetilde{V}$ definiert, *à fortiori* gilt Assoziativität für die hier definierte Verknüpfung). Wir erhalten so eine additive Kategorie **SmCor**.

Einem Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ in **Sm** ist der Graph $\Gamma_f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SmCor}}(X,Y)$ zugeordnet. Wenn X zusammenhängend ist, so auch Γ_f. Sonst ist die Summe der Komponenten von Γ_f eine Korrespondenz, da Γ_f isomorph zu X, also insbesondere endlich über X, und abgeschlossen in $X \times Y$, da Y separiert ist.

Lemma 3.2. *Seien* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ *Morphismen in* **Sm**. *So gilt in* **SmCor**: $\Gamma_g \circ \Gamma_f = \Gamma_{g\circ f}$.

Beweis: [Ful, Proposition 16.1.1.(c)(iii)] In der Einleitung zu [Ful, Kapitel 16] wird gefordert, daß alle Varietäten vollständig seien. Der Beweis der behaupteten Identität ist jedoch auch für beliebige glatte Varietäten gültig. □

Das Einheitselement $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SmCor}}(X,X)$ ist durch die Diagonale $\Delta_X \subset X \times X$ gegeben, wie man leicht nachprüft. Folglich hat man einen (treuen) Funktor

$$\mathbf{Sm} \longrightarrow \mathbf{SmCor}\colon (X \xrightarrow{f} Y) \mapsto (X \xrightarrow{\Gamma_f} Y).$$

Definition 3.3. Kontravariante additive Funktoren $\mathbf{SmCor}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ werden als *Prägarben mit Transfers* bezeichnet. Die Kategorie der Prägarben mit Transfers wird als $\mathbf{PSh}(\mathbf{SmCor})$ bezeichnet.

Die Kategorie $\mathbf{Shv}_t(\mathbf{SmCor})$ der *t-Garben mit Transfers* ist die volle Teilkategorie der Prägarben mit Transfers, deren Einschränkung auf **Sm** eine t-Garbe ist.

Für jedes $X \in \mathbf{SmCor}$ bezeichne $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)$ die repräsentierbare Prägarbe mit Transfers, d.h. $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{SmCor}}(V,X)$ (dies sind nach Definition der Morphismen in **SmCor** abelsche Gruppen) und $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr},t}(X)$ die Garbifizierung von $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}$ bzgl. der Topologie t.

Für einen Ring A wird $A_{\mathrm{tr}}(X)$ und $A_{\mathrm{tr},t}(X)$ analog definiert als $A_{\mathrm{tr}}(X)(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{SmCor}}(V,X) \otimes_{\mathbb{Z}} A$, z.B. $\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(X)$, $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]_{\mathrm{tr}}(X)$. Prägarben und Garben mit

Transfers von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen werden als $\mathbf{PSh}(\mathbf{SmCor}, \mathbb{Q})$, $\mathbf{Shv}_t(\mathbf{SmCor}, \mathbb{Q})$ bezeichnet.

Bemerkung 3.4.

- Die Garbifizierung einer Prägarbe mit Transfers ist im allgemeinen (d.h. für beliebiges t) keine Prägarbe mit Transfers. Für $t \in \{\mathrm{Nis}, \mathrm{\acute{e}t}\}$ berücksichtigt die Garbifizierung in kanonischer Weise Transfers, d.h. für jede Prägarbe mit Transfers F gibt es auf F_{Nis} (bzw. $F_{\mathrm{\acute{e}t}}$) genau eine Transferstruktur, so daß der natürliche Morphismus von Prägarben (ohne Transfers) $F \to F_{\mathrm{Nis}}$ (bzw. $F \to F_{\mathrm{\acute{e}t}}$) ein Morphismus von Prägarben mit Transfers ist, siehe [Voe3, Lemma 3.1.6] oder [MVW, Corollary 6.18.]. Für $t = \mathrm{h}$ wird eine etwas schwächere Aussage in 3.5 bewiesen.
- $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)$ ist für jedes glatte Schema X eine étale Garbe mit Transfers, siehe [MVW, Lemma 6.2.]. Weitere Beispiele für Prägarben mit Transfers sind $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}^*$ und μ_n (siehe [MVW, Example 2.4.] zur Definition der Transferstruktur).
- Gelegentlich werden wir auch die Prägarben $\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}'}(X)$, $\mathbb{Z}[1/p]_{\mathrm{tr}'}(X)$ etc. für ein nicht notwendig glattes Schema X verwenden. Damit meinen wir

$$\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}'}(X)(Y) := \mathbb{Q}\left[\begin{array}{l} W \subset X \times Y,\ \text{abgeschlossen, ganz,} \\ \text{endlich und surjektiv über } Y \end{array}\right],$$

  wobei Y ein beliebiges normales zusammenhängendes Schema ist (vgl. [SV1, §5 und §6]). Offenbar stimmt dies im Fall $X \in \mathbf{Sm}$ mit der obigen Definition bis auf den Unterschied irreduzible vs. ganze Zykel überein. Die Funktorialität ist wie folgt gegeben: Sei $f : Z \to Y$ ein Morphismus normaler zusammenhängender Schemata, $W \subset X \times Y$ ein ganzer Zykel, endlich und surjektiv über Y. $f^*([W]) := \sum n_i[(V_i)_{\mathrm{red}}]$, wobei V_i die irreduziblen Komponenten von $W \times_Y Z$ und $(V_i)_{\mathrm{red}}$ die assoziierten reduzierten (also ganzen) Schemata sind. Die Vielfachheiten n_i werden in [SV1, Definition im Anschluß an Lemma 5.6] definiert. Sie sind stets positiv, siehe *loc. cit.*

Lemma 3.5. *Die kanonischen (Mono-)Morphismen* $\mathbb{Z}(X) \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X), X \in \mathbf{Sm}$ *induzieren Isomorphismen*

$$\mathbb{Z}_{\mathrm{h}}(X) \cong \mathbb{Z}_{\mathrm{tr,h}}(X),$$

$$\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(X) \cong \mathbb{Q}_{\mathrm{tr,h}}(X).$$

Ferner trägt jede h-Garbe F in natürlicher Weise eine Transferstruktur. Diese Transferstruktur bezeichnen wir als kanonische Transferstruktur*.*

Der Beweis des Lemmas verwendet den Begriff der *universell ganzen relativen Zykel*. Die freie abelsche Gruppe der universell ganzen relativen Zykel auf $X \times_k V$, deren Träger eigentlich von relativer Dimension r über V ist, wird als $c(X/k, r)(V) = c(X \times_k V/V, r)$ bezeichnet. Wir schreiben $c^{\mathrm{eff}}(X/k, r)(V)$ für den freien abelschen Untermonoid der effektiven Zykel in $c(X/k, r)(V)$. Für die genaue Definition dieser Zykel siehe [SV2, §2.3., 3.1.1-3.1.3, Definition nach Lemma 3.3.9]. In unserer Situation vereinfachen sich die technisch aufwendigen Definitionen erheblich.

Beweis: Im folgenden sei V ein glattes Schema. Wir werden zunächst die Gruppe der Zykel $c(X/k,r)(V)$ in der hier vorliegenden Situation von glatten Schemata über k vereinfachen. Diese Zykel werden als Bindeglied zwischen $\mathbb{N}(X)$ und $\mathbb{N}_{\mathrm{tr}}(X)$ dienen und die Isomorphie von $\mathbb{N}_{\mathrm{h}}(X)$ und $\mathbb{N}_{\mathrm{tr,h}}(X)$ sichern. Daraus wird die erste Aussage sofort folgen, die beiden anderen ergeben sich ebenfalls daraus.

- $c(X/k,0)(V) = c(X \times_k V/V, 0)$ ist nach Definition die Gruppe der universell ganzen relativen Zykel auf $X \times_k V$, deren Träger eigentlich von relativer Dimension null über V ist. Diese Prägarbe ist offensichtlich additiv. Wegen der Additivität der vorliegenden Prägarben können wir V als zusammenhängend annehmen. Nach [SV2, Proposition 3.3.15] ist jeder relative Zykel ein universell ganzer Zykel, da V regulär ist. Ferner ist V normal, damit geometrisch „unibranche“ [EGA4, 6.15.1, 0.23.2.1], also gilt nach [SV2, Theorem 3.4.2], daß jede Teilmenge $Z \subseteq X$, die äquidimensional über V ist, einen relativen Zykel definiert. Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} c(X/k,0)(V) \quad &\supset \quad \mathbb{Z}\left[\begin{array}{l} Z \subset X \times V,\ \text{eigentlich von relativer} \\ \text{Dimension } 0 \text{ über } V,\ \text{äquidimensional über } V \end{array}\right] \\ &=: \quad c_{\mathrm{equi}}(X/k,0)(V). \end{aligned}$$

- Die Bedingung, eigentlich von relativer Dimension null zu sein, ist äquivalent zur Endlichkeit, denn noethersche Schemata der Dimension 0 haben nur endlich viele Punkte [Eis, Theorem 2.14] und für einen Morphismus $f : A \to B$ ist die Endlichkeit von f äquivalent zur Eigentlichkeit und Quasi-Endlichkeit.
  - „$\Rightarrow$“: f ist universell abgeschlossen und quasiendlich [Eis, Corollary 9.3], als affiner Morphismus separiert [Har, Corollary II.4.6(f), Proposition II.4.1], und nach Definition von endlichem Typ.
  - „$\Leftarrow$“: ein quasiendlicher Morphismus endlichen Typs $f : A \to B$ läßt sich als offene Immersion $i : A \to C$ gefolgt von einem endlichen Morphismus $g : C \to B$ faktorisieren: $f = g \circ i$ [Ray, Corollaire 2, Seite 42]. Der Morphismus f ist eigentlich, g ist separiert, damit ist i ebenfalls eigentlich [Har, Corollary II.4.8(e)]. Also ist $i(X)$ sowohl offen als auch abgeschlossen, daher eine disjunkte Vereinigung von Zusammenhangskomponenten von C, also kann man $f = g \circ \mathrm{Id}_A$ faktorisieren. Folglich ist f endlich.

- Jeder effektive Zykel ist äquidimensional [SV2, Proposition 3.1.7]. Es gilt also für glattes zusammenhängendes V:

$$c^{\mathrm{eff}}(X/k,0)(V) = \mathbb{N}[Z \subseteq X \times V, Z \text{ endlich über } V, Z \text{ irred.}] =: \mathbb{N}_{\mathrm{tr}}(X)(V),$$

d.h. $c^{\text{eff}}(X/k,0)(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{SmCor},\mathbb{N}}(V,X)$. Hierbei ist $\mathrm{Hom}_{\mathbf{SmCor},\mathbb{N}}$ der von den elementaren Korrespondenzen von V nach X erzeugte freie abelsche Monoid. Die Einschränkungsabbildungen für Morphismen $V' \to V$ stimmen nach [SV2, Corollary 3.3.11] überein.

Es gilt also folgende Gleichheit von Prägarben auf **Sm**: $c^{\text{eff}}(X/k,0)|_{\mathbf{Sm}} = \mathbb{N}_{\text{tr}}(X)$, also auch $c^{\text{eff}}_{\text{h}}(X/k,0) = \mathbb{N}_{\text{tr,h}}(X)$. Ferner verfügt man über einen Isomorphismus $\mathbb{N}_{\text{h}}(X) \xrightarrow{\cong} c^{\text{eff}}_{\text{h}}(X/k,0)$ [SV2, Theorem 4.2.12(2)]. Die Abbildung wird induziert durch $\mathbb{N}(X) \to c^{\text{eff}}(X/k,0)$, welche einen Morphismus von Schemata auf seinen Graphen abbildet.

- Insgesamt gilt
$$\mathbb{N}_{\text{h}}(X) \cong \mathbb{N}_{\text{tr,h}}(X).$$
Anders ausgedrückt: der kanonische Monomorphismus $\mathbb{N}(X) \to \mathbb{N}_{\text{tr}}(X)$ wird nach h-Garbifizierung zum Isomorphismus. Daraus folgen unmittelbar die analogen Aussagen für $\mathbb{Z}_{\text{tr}}$ und $\mathbb{Q}_{\text{tr}}$.

- Zur kanonischen Transferstruktur: sei F eine h-Garbe (ohne Transfers), $X \in$ **Sm**. Dann gilt
$$\begin{aligned} F(X) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh(Sm)}}(\mathbb{Z}(X),F) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}_{\text{h}}\mathbf{(Sm)}}(\mathbb{Z}_{\text{h}}(X),F) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}_{\text{h}}\mathbf{(Sm)}}(\mathbb{Z}_{\text{tr,h}}(X),F) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh(Sm)}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X),F). \end{aligned}$$
Sei $Z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SmCor}}(Y,X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh(SmCor)}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}(Y),\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X))$. Wir definieren $F(Z) : F(X) \longrightarrow F(Y)$ unter Verwendung des obigen Isomorphismus als $a \mapsto a \circ \mathbb{Z}_{\text{tr}}(Z)$. Es ist klar, daß die so definierte Verknüpfung eine Transferstruktur auf F definiert, deren Einschränkung auf **Sm** mit der ursprünglichen Garbenstruktur übereinstimmt.

$\square$

Lemma 3.6. *Die h-Garbifizierung von Prägarben mit Transfers behält die Transferstruktur bei (in einem schwächeren Sinne als im Nisnevich- und étalen Fall): versehen wir für eine Prägarbe mit Transfers F die h-Garbe F_{h} mit der kanonischen Transferstruktur, so ist der Garbifizierungsmorphismus $F \to F_{\text{h}}$ ein Morphismus von Prägarben mit Transfers.*

Ferner sind Morphismen von h-Garben Morphismen von Prägarben mit Transfers.

Beweis: Wir machen zunächst folgende Bemerkung: Für jede Prägarbe mit Transfers G verfügt man über eine natürliche Isomorphie von Funktoren auf **Sm**:
$$G(-) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh(SmCor)}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}(-),G) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh(Sm)}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}(-),G).$$
Die erste Bijektion folgt aus dem Yoneda-Lemma, vgl. Bemerkung 2.9. Die zweite zeigt man ebenso wie die erste unter Verwendung der Transferstruktur auf G. Für jede Prägarbe F hat F_{h} nach dem vorangegangenen Lemma Transfers, es gilt also $F_{\text{h}}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh(Sm)}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X),F_{\text{h}})$. Für eine Korrespondenz $Z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SmCor}}(Y,X)$ ist der Morphismus $F(X) \to F(Y)$ (bzw.

$F_{\mathrm{h}}(X) \to F_{\mathrm{h}}(Y)$) induziert durch die Abbildung $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y) \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)$. Betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} F(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh(Sm)}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X), F) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh(Sm)}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X), F_{\mathrm{h}}) = F_{\mathrm{h}}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh(Sm)}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y), F) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh(Sm)}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y), F_{\mathrm{h}}) = F_{\mathrm{h}}(Y) \end{array}$$

Die waagerechten Abbildungen sind induziert durch den Morphismus von Prägarben (*ohne* Transfers) $F \to F_{\mathrm{h}}$. Aus der Kommutativität des Diagramms folgt die erste Behauptung. Die zweite Behauptung beweist man vollkommen analog. □

3.2 Vergleichssätze

Definition 3.7. Eine Prägarbe F heißt *Homotopie-invariant*, falls die kanonische Projektion $p : X \times \mathbb{A}^1 \to X$ für jedes glatte Schema X einen Isomorphismus $p^* : F(X) \to F(X \times \mathbb{A}^1)$ induziert.

Bemerkung 3.8. Der Morphismus $i_0 : X \to X \times \{0\}$ induziert einen Schnitt von p^*, daher ist die Isomorphie äquivalent zur Surjektivität. Offensichtlich sind für jede Homotopie-invariante Prägarbe F in einer exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

auch F', F'' Homotopie-invariant. Insbesondere sind für einen Komplex F^* von Homotopie-invarianten Prägarben auch die Kohomologie*prä*garben $\mathrm{H}^n(F^*)$ Homotopie-invariant.

Die folgenden Vergleichssätze von Friedlander, Suslin und Voevodsky sind die Grundlage für das Arbeiten mit (Prä-)Garben mit Tranfers. Ausgehend von einer Homotopie-invarianten Prägarbe mit Transfers sind alle Kohomologieprägarben der Garbifizierungen bezüglich der Zariski-, Nisnevich-, étalen, cdh-Topologien ebenfalls Homotopie-invariante Prägarben mit Transfers und unabhängig von der Wahl der Topologie. Diese Aussagen konnten unter geeigneten Voraussetzungen an die Prägarben ($\mathbb{Q}$-Vektorraumgarben) auf die qfh- und die h-Topologie ausgedehnt werden.

Neben dem vorgestellten Konzept von Transfers im Sinne endlicher Korrespondenzen gibt es den Begriff der Prätheorie. Prätheorien sind additive Prägarben mit einer Transferstruktur für Zykel auf glatten Kurven [Voe2, Definition 3.1]. Eine Prägarbe mit Transfers ist eine Prätheorie [Voe3, Proposition 3.1.11]. Die folgenden Kohomologievergleichsresultate sind nicht nur für Garben mit Transfers, sondern auch für Prätheorien gültig [Voe2, insbesondere Abschnitte 4 und 5]. Wir werden jedoch alle Resultate für Prägarben mit Transfers formulieren, da sich die Interpretation der glatten Korrespondenzen als Kategorie als vorteilhaft erweisen wird.

Theorem 3.9. *(Vergleich von Zariski- und Nisnevich-Garbifizierung)*
Sei F eine Homotopie-invariante Prägarbe mit Transfers und k ein perfekter Körper.

- *Die Zariski-Garbifizierung F_{Zar} hat eine eindeutige Struktur einer Prägarbe mit Transfers, so daß der kanonische Morphismus $F \longrightarrow F_{\mathrm{Zar}}$ ein Morphismus von Prägarben mit Transfers ist. Die gleiche Aussage gilt für die Nisnevich- und die Étale-Topologie.*
- *Der kanonische Morphismus $\mathrm{H}^n_{\mathrm{Zar}}(X, F_{\mathrm{Zar}}) \longrightarrow \mathrm{H}^n_{\mathrm{Nis}}(X, F_{\mathrm{Nis}}), X \in \mathbf{Sm}, n \geq 0$ ist ein Isomorphismus.*
- *Die Prägarben $X \mapsto \mathrm{H}^n_{\mathrm{Nis}}(X, F_{\mathrm{Nis}}), X \in \mathbf{Sm}, n \geq 0$ sind in natürlicher Weise Prägarben mit Transfers und sind ebenfalls Homotopie-invariant.*

Beweis: [MVW, Theorem 21.15., Theorem 13.1., Proposition 6.17., Proposition 13.8., Theorem 23.1.] □

Theorem 3.10. *(Vergleich von Nisnevich- und étaler Garbifizierung)*

- *Sei F eine Homotopie-invariante Prägarbe mit Transfers von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen. Dann sind F_{Nis} und $F_{\mathrm{\acute{e}t}}$ auf $\mathbf{Sm}$ isomorph.*
- *Sei F eine étale Garbe von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen. Dann sind die Nisnevich- und étalen Kohomologiegruppen von F isomorph.*

Beweis: [MVW, Corollary 14.14., Proposition 14.15.] □

Theorem 3.11. *(Vergleich von étaler und qfh-Kohomologie) Sei F eine qfh-Garbe von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen auf* **Sch**. *Dann sind die étalen und die qfh-Kohomologiegruppen für normale Schemata X isomorph:*

$$\mathrm{H}^n_{\mathrm{\acute{e}t}}(X, F) = \mathrm{H}^n_{\mathrm{qfh}}(X, F), n \in \mathbb{N}.$$

Beweis: [Voe1, Theorem 3.4.1] □

Theorem 3.12. *(Vergleich von Nisnevich- und cdh-Kohomologie)*
Sei k ein Körper, der die starke Auflösung von Singularitäten gestattet und F eine Homotopie-invariante Prägarbe mit Transfers. F_{cdh} bezeichne die cdh-Garbifizierung von F im Sinne von 2.11. So gilt für jedes glatte Schema X:

$$\mathrm{H}^n_{\mathrm{cdh}}(X, F_{\mathrm{cdh}}) = \mathrm{H}^n_{\mathrm{Nis}}(X, F_{\mathrm{Nis}}).$$

Beweis: Siehe den Beweis von [FV, Theorem 5.5] für Prätheorien. Prägarben mit Transfers sind Prätheorien [Voe3, Proposition 3.1.11] □

Lemma 3.13. *Sei F eine Prägarbe auf Schemata. Wir nehmen an, daß F sowohl eine qfh-Garbe, als auch eine cdh-Garbe ist. Dann ist F eine h-Garbe.*

Beweis: Betrachte die exakte Sequenz von qfh-Garben

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F_{\mathrm{h}} \longrightarrow F'' \longrightarrow 0,$$

wobei F' und F'' Kern bzw. Kokern des Garbifizierungsmorphismus sind. Aus dem Fünfer-Lemma folgt, daß F' und F'' cdh-Garben sind, denn F und F_{h} sind es. Wir können also zusätzlich $F_{\mathrm{h}} = 0$ annehmen. Es ist $F = 0$ zu zeigen.

Sei $X \in \mathbf{Sch}$, ohne Einschränkung reduziert (da F qfh-Garbe), $a \in F(X)$. Es gibt eine h-Überdeckung $\{g_i : U_i \to X\}$, so daß $g_i^*(a) = 0$. Ohne Einschränkung kann man annehmen, daß es sich um eine normale h-Überdeckung handelt (2.16):

$$g_i : U_i \xrightarrow{f_i} U \xrightarrow{f} X_{X_1} \xrightarrow{p} X,$$

wobei die f_i eine offene Überdeckung von U bilden, f ein endlicher surjektiver Morphismus und p eine Aufblasung in einer abgeschlossenen Teilmenge $X_1 \subseteq X$ ist. Offenbar ist $\{U_i \xrightarrow{f \circ f_i} X_{X_1}\}$ eine qfh-Überdeckung und $(f \circ f_i)^*(p^*(a)) = 0$. Da F eine qfh-Garbe ist, folgt $p^*(a) = 0$. Da F eine cdh-Garbe und $X_{X_1} \sqcup X_1 \to X$ eine cdh-Überdeckung ist, reicht es $F(X_1) = 0$ zu zeigen.

Wir führen eine noethersche Induktion bzgl. der echt absteigenden Kette von abgeschlossenen Teilmengen $X =: X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq \ldots$ durch (Bemerkung 2.15). Die Induktion bricht ab, wenn diese Kette stationär wird oder wenn in der normalen Verfeinerung der Überdeckung von X_i die Aufblasung nicht mehr vorkommt. Ersteres ist nicht möglich, daher tritt nach einer endlichen Anzahl von Schritten (X ist noethersch) der Fall ein, daß die h-Überdeckung von X_i sogar eine qfh-Überdeckung ist. □

Theorem 3.14. *(Vergleich von Nisnevich- und (qf)h-Garbifizierung)* *k gestatte die starke Auflösung der Singularitäten. Sei F eine Homotopie-invariante Prägarbe mit Transfers (auf* **Sm***) von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen. F_{qfh} und F_{h} bezeichnen die jeweiligen Garbifizierungen von F auf* **Sch***. Dann sind F_{Nis}, $F_{\mathrm{qfh}}|_{\mathbf{Sm}}$ und $F_{\mathrm{h}}|_{\mathbf{Sm}}$ isomorph.*

Wir verwenden für den Beweis die folgenden Lemmata. Bezeichne p die exponentielle Charakteristik von k ($p = 1$ falls char $k = 0$, sonst $p =$ char k).

Lemma 3.15. *Sei X ein normales zusammenhängendes Schema, $f : Y \longrightarrow X$ die Normalisierung von X in einer endlichen normalen Erweiterung von $k(X)$ mit Galoisgruppe G sowie $Z \in$* **Sch** *beliebig. G operiert auf $\mathbb{Z}[1/p]_{\mathrm{tr}'}(Z)(Y)$; bezeichne $\mathbb{Z}[1/p]_{\mathrm{tr}'}(Z)(Y)^G$ die Galois-invarianten Elemente. Dann ist*

$$f^* : \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]_{\mathrm{tr}'}(Z)(X) \longrightarrow \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]_{\mathrm{tr}'}(Z)(Y)^G$$

ein Isomorphismus (siehe Bemerkung 3.4 zur Definition von $\mathbb{Z}[1/p]_{\mathrm{tr}'}$). Die Urbilder effektiver Zykel in $\mathbb{Z}[1/p]_{\mathrm{tr}'}(Z)(Y)^G$ sind effektiv.

Beweis: [SV1, Corollary 6.2]. Die zweite Aussage folgt aus dem Beweis in *loc. cit.* □

Lemma 3.16. *Sei $f : Y \longrightarrow X$ die Normalisierung eines glatten (damit exzellenten) zusammenhängenden affinen Schemas $X = \operatorname{Spec} A$ in einer normalen endlichen Körpererweiterung L von $k(X)$. Dann gibt es eine Korrespondenz*

$$f_* \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]_{\mathrm{tr}'}(Y)(X)$$

(endliche ganze Korrespondenz von X nach Y mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}[1/p]$), welche $f \circ f_* = d \cdot \mathrm{Id}_X$, $d \in \mathbb{N}^{>0}$ erfüllt.

Beweis: (vgl. [Voe1, Theorem 3.3.8] für $\mathbb{Z}_{\mathrm{qfh}}$). Der Beweis verläuft wie folgt: Wir interpretieren die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(Y/X)$ als Galois-Gruppe der beteiligten Funktionenkörper und verwenden 3.15, um die Existenz einer effektiven Korrespondenz f_* mit $f \circ f_* \circ f = d \cdot f$ zu zeigen. Anschließend zeigen wir, daß aus der Surjektivität von f und der Effektivität von f_* die Behauptung $f \circ f_* = d \cdot \mathrm{Id}_X$ folgt.

- Sei $Y = \operatorname{Spec} B$. B ist nach Definition der ganze Abschluß von A in L. Da X exzellent ist, ist Y endlich über X, d.h. B ist eine endliche A-Algebra. $k(B)$ ist gerade L. Offenbar gilt $k(B) \subset L$. Zum Beweis der umgekehrten Inklusion gehen wir wie folgt vor: L ist endlich, also algebraisch über $k(A)$. Man wandelt die Algebraizitätsgleichung eines Elementes l von L in eine Ganzheitsgleichung von $l \cdot a$ mit $a \in A$ um und verwendet die Normalität von B.

- $\mathrm{Aut}(Y/X)$ stimmt mit $G = \mathrm{Gal}(k(Y)/k(X))$ überein und ist damit eine endliche Gruppe. Dies sieht man wie folgt: der ganze Abschluß von A in $k(B) = k(Y)$ stimmt mit B überein (s.o.). Es reicht zu zeigen, daß $g \in G$ durch Einschränkung eine Abbildung $B \longrightarrow B$ induziert. B ist endlich, also ganz über A, d.h. jedes $b \in B$ erfüllt eine Ganzheitsrelation $b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$, $a_i \in A$.

  $$0 = g(b^n + \ldots) = g(b)^n + \ldots + g(a_0) = g(b)^n + a_{n-1}g(b)^{n-1} \ldots + a_0,$$

  folglich ist $g(b) \in B$.

- $a = \sum_{g \in G} g$ ist G-invariant. Jedes g ist als Graph des entsprechenden Automorphismus aufzufassen. Da Y ganz ist, entspricht a der Summe von *ganzen* Korrespondenzen, d.h. a ist ein Element von $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}'}(Y)(Y)$ (nicht nur in $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y)(Y)$). Nach Lemma 3.15 hat a ein Urbild $f_* \in \mathbb{Z}[1/p]_{\mathrm{tr}'}(Y)(X)$:

  $$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "a"] & & \\ X \arrow[r, "f_*"] & Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

  Bezeichne d die Kardinalität von G. Dann gilt

  $$f \circ f_* \circ f = f \circ a = d \cdot f.$$

- Wir zeigen nun, daß für jeden surjektiven Morphismus $f : Y \to X$ von Schemata, Y ganz, X glatt und jede effektive Korrespondenz $c \in \mathbb{N}_{\mathrm{tr}'}(X)(X)$ mit $c \circ f = d \cdot f$ schon $c = d \cdot \mathrm{Id}_X$ folgt. Daraus folgt die Behauptung, denn in unserer Situation ist f surjektiv und wegen Lemma 3.15 ist f_* effektiv (d.h. alle Koeffizienten sind positiv), da a offensichtlich effektiv ist.

- Sei $c = \sum_j n_j \cdot c_j$, $n_j \in \mathbb{N}$, $c_j \subset X \times X$ ganz und endlich über X. Nach Definition ist

  $$c \circ f = \sum_{i,j} n_j \cdot m_{ij} \cdot W_{ij} = d \cdot \Gamma_f.$$

  Hierbei sind $W_{ij} \subset T_j$ die assoziierten reduzierten Schemata der irreduziblen Komponenten von $T_j := c_j \times_X Y$, der Morphismus $c_j \to X$ ist die Projektion auf die erste Komponente. Die Vielfachheiten der Komponenten m_{ij} sind positiv (Bemerkung 3.4). Da alle Koeffizienten positiv sind, folgt $W_{ij} = \Gamma_f$ für alle i, j sowie $\sum_{i,j} n_j m_{ij} = d$.

  (*nota bene:* Bei der Definition der Komposition in **SmCor** wird zunächst das assoziierte ganze Schema der beteiligten elementaren Korrespondenzen genommen, dies ist hier nicht nötig, da c_j bereits ganz ist).

- Wir betrachten zunächst nur die abgeschlossenen (d.h. $\bar{k}$-wertigen Punkte) der beteiligten Schemata. Der Übersicht halber schreiben wir in diesem Absatz $\widehat{X} := X(\bar{k})$ usw. Bezeichne mit $(w_1, w_2) \in \widehat{W_{ij}} =: \widehat{W}$ die $\bar{k}$-wertigen Punkte von W. Wegen $W = \Gamma_f$ folgt $f(w_1) = w_2$. f ist surjektiv. Wegen Hilberts Nullstellensatz [Eis, Theorem 4.19] liegen die abgeschlossenen Punkte in einem Schema (endlichen Typs über k) dicht. Daraus folgt, daß auch $\widehat{f} : \widehat{Y} \to \widehat{X}$ surjektiv ist. Also gilt $\widehat{W} = \{(y, f(y)), y \in \widehat{Y}\}$. Sei $x \in \widehat{X}$ beliebig, wähle ein Urbild $y \in \widehat{Y}$ von x. Wegen

  $$\widehat{c_j \times_X Y} = \{(y, x) \in \widehat{Y} \times \widehat{X} | (f(y), x) \in c_j\}$$

  ist $(x = f(y), x) \in c_j$, d.h. $\widehat{\Delta_X} \subset \widehat{c_j}$. Es gilt auch die umgekehrte Inklusion $\widehat{c_j} \subset \widehat{\Delta_X}$: Sei $(x, x') \in \widehat{c_j}$. Wähle ein Urbild $y \in \widehat{Y}$ von x. Dann ist $(y, x') \in \widehat{T_j} = \widehat{W} = \widehat{\Gamma_f}$ und $f(y) = x' = x$.

- Damit stimmen die abgeschlossenen Punkte von Δ_X und c_j überein, also stimmen die beiden als (abgeschlossene) Teilmengen von $X \times X$ überein (Hilberts Nullstellensatz). Da X, also auch Δ_X reduziert ist, folgt die Gleichheit der beiden Schemata $\Delta_X = c_j$. Also ist $\#\{j\} = 1$. $T = \Gamma_f \cong Y$ ist irreduzibel, demnach ist $\#\{i\} = 1$. Da Y nach Voraussetzung ganz ist, ist die Vielfachheit $m = 1$. Insgesamt ergibt sich $c = d \cdot \mathrm{Id}_X$.

$\square$

Beweis des Theorems 3.14: Unter Verwendung der Vergleichssätze für die Nisnevich- und cdh-Topologie reduzieren wir die Behauptung, daß für eine

Homotopie-invariante Prägarbe von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen mit Transfers die Garbifizierungen $F_{\mathrm{Nis}}, F_{\mathrm{qfh}}|_{\mathbf{Sm}}$ und $F_{\mathrm{h}}|_{\mathbf{Sm}}$ isomorph sind, auf die Aussage

$$F_{\mathrm{qfh}} = 0 \Longrightarrow F = 0.$$

Wegen der Existenz normaler qfh-Überdeckungen können wir dies auf die Diskussion des Verhaltens von repräsentierbaren Garben mit Transfers bei einem endlichen Morphismus zurückführen. Da wir mit $\mathbb{Q}$-Vektorraumgarben arbeiten, ergibt 3.16 schließlich die Behauptung.

- Wegen 3.9 können wir annehmen, daß F eine homotopie-invariante Nisnevich-Garbe mit Transfers ist. Ferner kann F wegen 3.12 auch als cdh-Garbe auf **Sch** angenommen werden. Demzufolge ist F_{qfh} wegen 3.13 bereits eine h-Garbe, d.h. $F_{\mathrm{qfh}} = F_{\mathrm{h}}$. Betrachte die exakte Sequenz von Nis-Garben mit Transfers – $\mathbf{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{SmCor})$ ist eine abelsche Kategorie, [Voe3, Theorem 3.1.4]:
$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F_{\mathrm{qfh}} \longrightarrow F'' \longrightarrow 0.$$
$F \to F_{\mathrm{qfh}} = F_{\mathrm{h}}$ ist ein Morphismus von Garben mit Transfers wegen 3.6.

  nota bene: F trägt eine eindeutige Transferstruktur (4.5). Man könnte zeigen, daß F_{qfh} ebenfalls Homotopie-invariant ist. Damit trüge es ebenfalls eine eindeutige Transferstruktur. Daraus könnte man folgern, daß der Morphismus ein Morphismus von Prägarben mit Transfers ist.

- Wie im Beweis von Lemma 3.13 reicht es, folgende Aussage zu beweisen: Sei F eine (nicht notwendig Homotopie-invariante) cdh-Garbe auf **Sch**, deren Einschränkung auf **Sm** eine Garbe mit Transfers ist, so daß $F_{\mathrm{qfh}} = 0$. Dann gilt $F = 0$.

- Sei $X \in \mathbf{Sch}$, ohne Einschränkung affin und glatt (da F cdh-Garbe), $a \in F(X)$ ein beliebiger Schnitt. Es ist $a = 0$ zu zeigen. Nach Konstruktion der assoziierten Garbe (Abschnitt 2.1.3, Satz 2.6) gibt es eine qfh-Überdeckung $\{f_i : U_i \longrightarrow X\}$, so daß $f_i^*(a) = 0$ für alle i. Man kann diese Überdeckung als normal annehmen (2.16), d.h. $f_i = in_i \circ f$, wobei $\{in_i : U_i \longrightarrow U\}$ eine offene Überdeckung und $f : U \longrightarrow X$ ein endlicher surjektiver Morphismus ist.

- Da F insbesondere eine Zariski-Garbe ist, folgt $f^*(a) = 0$, d.h. wir können annehmen, die Überdeckung besteht aus einem einzigen endlichen surjektiven Morphismus. Ferner kann man das exzellente Schema U durch seine Normalisierung in einer normalen endlichen Erweiterung von $k(X)$ ersetzen. Wähle eine cdh-Überdeckung $\widetilde{U} \to U$ durch ein glattes Schema $\widetilde{U}$ (Auflösung der Singularitäten).

- F ist eine Transfergarbe, es gilt also $F(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathbf{SmCor})}(\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(V), F) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathbf{Sm})}(\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(V), F) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathbf{Sm})}(\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}'}(V), F)$ für jedes glatte V (siehe den Beweis von Lemma 3.6). Da F eine cdh-Garbe ist, kann man in jedem

Hom-Term die erste Prägarbe cdh-garbifizieren, ohne daß sich die Morphismengruppe ändert. Der Morphismus $F(X) \to F(\widetilde{U})$ ist also induziert durch

$$\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}',\mathrm{cdh}}(\widetilde{U}) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Q}_{\mathrm{tr}',\mathrm{cdh}}(U) \xrightarrow{\beta} \mathbb{Q}_{\mathrm{tr}',\mathrm{cdh}}(X).$$

α ist ein Epimorphismus: wegen [SV1, Theorem 6.3] ist $\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}'}(W)|_{\mathbf{Sm}} = \mathbb{Q}_{\mathrm{qfh}}(W)|_{\mathbf{Sm}}$ für jedes (nicht notwendig glatte) Schema W. Damit gilt (Lemma 2.10) auch $\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}'}(W)_{\mathrm{cdh}} = \mathbb{Q}_{\mathrm{qfh},\mathrm{cdh}}(W) = \mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(W)$. Da $\widetilde{U} \to U$ insbesondere eine h-Überdeckung ist, folgt die Behauptung aus [Voe1, Proposition 3.2.5.2]. Nach 3.16 hat β einen Schnitt, ist also ein Epimorphismus. Deswegen ist $F(X) \to F(\widetilde{U})$ eine Injektion, d.h. $a = 0$. Dies war zu zeigen.

□

Damit ergibt sich der Spezialfall $n = 0$ von 3.17 mit einem etwas „elementareren“ Beweis. Man beachte, daß die Beweise jeweils aus der Interpretation der h-Topologie als „Vereinigung“ von qfh- und cdh-Topologie sowie den Vergleichssätzen für die qfh- und cdh-Topologien bestehen.

Theorem 3.17. *(Vergleich von h- und qfh-Kohomologie) Sei k ein Körper, der die starke Auflösung von Singularitäten gestattet und F eine Homotopie-invariante Prägarbe mit Transfers von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen. So gilt für alle $X \in$* **Sm**, *$n \geq 0$:*

$$\mathrm{H}^n_{\mathrm{h}}(X, F_{\mathrm{h}}) = \mathrm{H}^n_{\mathrm{qfh}}(X, F_{\mathrm{qfh}}).$$

Zum Beweis des Theorems verwenden wir das folgende Lemma.

Lemma 3.18. *Sei X glatt, $Z \subset X$ ein glattes abgeschlossenes Unterschema. $p_Z : X_Z \to X$ bezeichne die Aufblasung von X in Z. Ferner sei F eine Homotopie-invariante Prägarbe mit Transfers von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen. Dann gilt für $i \geq 0$*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{Shv}_{\mathrm{qfh}}(\mathbf{Sm})}(\mathrm{coker}\ \mathbb{Z}_{\mathrm{qfh}}(p_Z)), F_{\mathrm{qfh}}) = 0.$$

Beweis: Eine analoge Aussage für die Nisnevich-Topologie wird in [Voe2, Proposition 5.21] unter Verwendung der Aussage, daß die Nisnevich-Kohomologiegruppen von F_{Nis} Homotopie-invariant sind, bewiesen. Der Beweis von *loc. cit.* überträgt sich auf jede feinere Topologie t, für die $\mathrm{H}^i_t(X, F_t) \cong \mathrm{H}^i_t(X \times \mathbb{A}^1, F_t)$ gilt. Insbesondere gilt die Aussage für Garben von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen für die qfh-Topologie (3.9, 3.10, 3.11). □

Lemma 3.19. *Sei k ein Körper, der die Auflösung von Singularitäten gestattet, F eine qfh-Garbe, welche $F_{\mathrm{h}} = 0$ erfüllt, G eine Homotopie-invariante Prägarbe mit Transfers von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen sowie $n \geq 0$. So gilt*

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{Shv}_{\mathrm{qfh}}(\mathbf{Sm})}(F, G_{\mathrm{qfh}}) = 0.$$

Beweis:

- Der Beweis ist im wesentlichen identisch zu dem von [FV, Lemma 5.4]. Da auch G_{qfh} Homotopie-invariant ist (3.9, 3.14), kann man $G = G_{\mathrm{qfh}}$ annehmen. Der Beweis verläuft nun durch Induktion nach n. Für $n < 0$ ist nichts zu zeigen. Im Beweis des Lemmas schreiben wir $\mathrm{Ext}^*(-,-)$ für $\mathrm{Ext}^*_{\mathbf{Shv}_{\mathrm{qfh}}(\mathbf{Sm})}(-,-)$.

- Man zeigt nun wie im Beweis von [FV, Lemma 5.4] mit einem Induktionsargument unter Verwendung des obigen Ersatzlemmas 3.18 anstelle von [Voe2, Proposition 5.21] (bzw. [FV, Lemma 5.3]), daß für einen Morphismus $p : U' \to U$, der sich als endliche Komposition von Aufblasungen in glatten Zentren darstellen läßt, $\mathrm{Ext}^n(\mathrm{coker}\ \mathbb{Z}_{\mathrm{qfh}}(p), G) = 0$ gilt.

- Wir zeigen nun $\mathrm{Ext}^n(F, G) = 0$. Da jeder Schnitt von $a \in F(U)$, $U \in \mathbf{Sm}$ einem Morphismus $s : \mathbb{Z}(U) \to F$ entspricht, verfügt man über einem Epimorphismus von Prägarben

$$\bigoplus_{U\in\mathbf{Sm}, s\in F(U)} \mathbb{Z}(U) \xrightarrow{s} F.$$

Für jeden solchen Schnitt s gibt es nach Voraussetzung eine h-Überdeckung $f_s : U'_s \to U_s$, so daß $f_s^*(s) = 0$. Ohne Einschränkung ist diese Überdeckung normal, d.h. Komposition einer Zariski-Überdeckung, eines surjektiven endlichen Morphismus sowie einer Aufblasung $p_s : (U_s)_{V_s} \to U_s$ in einem *nicht notwendig glatten* Zentrum $V_s \subset U_s$. Da F eine qfh-Garbe ist, ist $p_s^*(s) = 0$. Die Auflösung der Singularitäten (2.1) garantiert nun die Existenz einer endlichen Folge von Aufblasungen in *glatten* Zentren $q_s : \widetilde{U_s} = U_j \to U_{j-1} \to \dots \to U_0 = U_s$, so daß q_s durch p_s faktorisiert:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{U_s} \arrow[d] \arrow[dr, "q_s"] & \\ (U_s)_{V_s} \arrow[r, "p_s"] & U_s \end{tikzcd}$$

Bezeichne Φ den Kern des Epimorphismus $(\oplus_s \mathrm{coker}\ \mathbb{Z}(q_s)) =: \Psi \to F$.

- Es gilt $\Psi_{\mathrm{h}} = (\oplus_s \mathrm{coker}\ \mathbb{Z}(q_s))_{\mathrm{h}} = 0$: Sei $\bar{t} \in \Psi(W)$ das Bild von $t \in \oplus_s \mathbb{Z}(U_s)(W)$, ohne Einschränkung ist nur eine Komponente von t in der direkten Summe von Null verschieden. Nach Definition ist $t = \sum n_i \cdot t_i$ eine Linearkombination von Morphismen $W \to U_s$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß $t = \sum n_i \cdot t_i$ nur aus einem Morphismus besteht. Dann ist das Faserprodukt $\widetilde{W} := W \times_{U_s} \widetilde{U_s}$ wohldefiniert. $q'_s : \widetilde{W} \to W$ ist eine h-Überdeckung:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{W} \arrow[r, "q'_s"] \arrow[d] & W \arrow[d, "t"] \\ \widetilde{U_s} \arrow[r, "q_s"] & U_s \end{tikzcd}$$

und $t \circ q'_s$ ist ein Element von $\mathbb{Z}(U_s)(\widetilde{W})$, welches über q_s faktorisiert, demnach ist $\bar{t} = 0$ in Ψ_{h}.

- Wir haben $\Phi_{\mathrm{h}} \subset \Psi_{\mathrm{h}} = 0$. Aus der langen exakten Ext-Sequenz

$$\mathrm{Ext}^n(\Psi, G) \leftarrow \mathrm{Ext}^n(F, G) \leftarrow \mathrm{Ext}^{n-1}(\Phi, G)$$

folgt nun wegen der Induktionsannahme $\mathrm{Ext}^{n-1}(\Phi, G) = 0$ und wegen

$$\mathrm{Ext}^n(\Psi, G) = \Pi_s \mathrm{Ext}^n((\mathrm{coker}\ \mathbb{Z}(q_s))_{\mathrm{qfh}}, G) = 0$$

(s.o.) die Behauptung.

□

Bemerkung 3.20. Lediglich im Beweis dieses Lemmas (sowie des Analogons [FV, Lemma 5.4]) wird die starke Auflösung der Singularitäten (d.h. die zweite Forderung in Definition 2.1, welche die Einschränkung auf char $k = 0$ bedingt) benötigt.

Beweis des Theorems 3.17:
- Der Beweis ist nahezu identisch mit dem des analogen Vergleichsresultats zwischen cdh- und Nisnevich-Topologie (3.12). Die Beweisidee „cdh = Nis + Aufblasungen" läßt sich als „h = qfh + Aufblasungen" (vgl. 2.16) auch hier verwenden. Ohne Einschränkung (Theorem 3.9 und Theorem 3.14) sei F eine qfh-Garbe.

- Sei $\mathcal{X} = (X_i)$ eine h-Hyperüberdeckung von X, d.h. eine Hyperüberdeckung in $\mathbf{Sm}/X$ im Sinne von 2.17. Die Auflösung der Singularitäten sichert eine Verfeinerung von $\mathcal{X}$ durch eine Hyperüberdeckung durch glatte Schemata X_i (Lemma 2.21). Sei

$$\mathbb{Z}(\mathcal{X}) : \ldots \longrightarrow \mathbb{Z}(X_2) \longrightarrow \mathbb{Z}(X_1) \longrightarrow 0$$

der assoziierte Moore-Komplex. Man hat einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{H}^n_{\mathrm{h}}(X, F) = \operatorname*{colim}_{\mathcal{X}\ \mathrm{glatt}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{qfh}}(\mathbf{Sm}))}(\mathbb{Z}(\mathcal{X}), F[n]).$$

Dies wird in [SGA4, Bd. 2, Exposé V, Théorème 7.4.1] gezeigt, siehe auch [Fri, Theorem 3.8.] für eine analoge Aussage in der Étale-Topologie.

- Der kanonische Morphismus $\mathbb{Z}_{\mathrm{qfh}}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\mathrm{qfh}}(X)$ wird nach h-Garbifizierung zum Quasi-Isomorphismus (2.18), oder anders ausgedrückt, sein Kegel K erfüllt $K_{\mathrm{h}} = 0$. Die lange exakte $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{qfh}}(\mathbf{Sm}))}$-Sequenz

$$\begin{array}{cccccc} \ldots & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^-}(K, F[i-1]) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^-}(\mathbb{Z}(X)_{\mathrm{qfh}}, F[i]) & \to \\ & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^-}(\mathbb{Z}(\mathcal{X})_{\mathrm{qfh}}, F[i]) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^-}(K, F[i]) & \to & \ldots \end{array}$$

liefert die Behauptung, wenn wir $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^-}(K, F[i]) = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ zeigen, denn

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{qfh}}(\mathbf{Sm}))}(\mathbb{Z}(X)_{\mathrm{qfh}}, F[i]) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{qfh}}(\mathbf{Sm}))}(\mathbb{Z}(X)_{\mathrm{qfh}}, F[i]) \\ &= \mathrm{H}^i_{\mathrm{qfh}}(X, F). \end{aligned}$$

- Betrachte die Teilkategorie $\mathcal{L} \subset \mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{qfh}}(\mathbf{Sm}))$, welche alle Komplexe L enthält, so daß $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{qfh}}(\mathbf{Sm}))}(L, F[i]) = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt. Es folgt unmittelbar aus der Definition einer lokalisierenden Teilkategorie, daß $\mathcal{L}$ lokalisierend ist. Für die Terme K^n von K gilt

  $$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{qfh}}(\mathbf{Sm}))}(K^n_{\mathrm{qfh}}, F[i]) = \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{Shv}_{\mathrm{qfh}}(\mathbf{Sm})}(K^n, F) \overset{3.19}{=} 0,$$

  d.h. $K^n \in \mathcal{L}$, also wegen Lemma 2.30 auch $K \in \mathcal{L}$, was zu beweisen war.

$\square$

Das folgende Theorem faßt die obigen Ergebnisse zusammen. Es wird ein entscheidender Bestandteil im Beweis des Einbettungssatzes sein, da sich gewisse Morphismen in der Kategorie der effektiven Motive als Hyperkohomologiegruppen interpretieren lassen. Das Theorem ist ein Fingerzeig für die sehr spezielle Struktur von Homotopie-invarianten Zariskigarben mit Transfers von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen: sie sind bereits Garben bezüglich der sehr feinen h-Topologie - sie enthält étale Morphismen, endliche surjektive Morphismen und Aufblasungen.

Theorem 3.21. *Sei F^* ein nach oben beschränkter Komplex von Prägarben von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen mit Transfers, dessen Kohomologie-t-Garben Homotopie-invariant sind. Sei*

$$t \in \{\mathrm{Zar}, \mathrm{Nis}, \text{ét}, \mathrm{cdh}, \mathrm{qfh}, \mathrm{h}\}.$$

*Ferner gestatte k die starke Auflösung der Singularitäten. So tragen die Hyperkohomologieprägarben $X \mapsto \mathbb{H}^n_t(X, F^*_t)$, $X \in$ **Sm** Transferstruktur, sind ebenfalls Homotopie-invariant und unabhängig von der Wahl der Topologie t.*

Die Voraussetzung an F^* ist erfüllt, wenn die Kohomologieprägarben von F^* Homotopie-invariant sind.

Beweis: Falls F^* ein im Grad 0 konzentrierter Komplex ist, ist wegen der obigen Theoreme (3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.14, 3.17) nichts mehr zu zeigen, denn in dem Fall ist die Hyperkohomologie des Komplexes nichts anderes als die Kohomologie der Garbe F. Dies zeigt auch die letzte Behauptung. Bezeichne sonst $(\mathrm{H}^q(F^*))_t$ die t-Garbifizierung der q-ten Kohomologieprägarbe des Komplexes F^*, welche nach obigen Sätzen ebenfalls eine Homotopie-invariante Prägarbe mit Transfers ist. Die Prägarben $X \mapsto \mathbb{H}^n_{\mathrm{Nis}}(X, F^*_{\mathrm{Nis}})$ haben Transfers wegen [MVW, Exercise 13.5.]. Damit haben auch die übrigen Hyperkohomologien, die zur Nisnevich-Hyperkohomologie kanonisch isomorph sind, Transfers. Die Hyperkohomologiespektralsequenz [Wei, Proposition 5.7.9]

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p_t(X, (\mathrm{H}^q(F^*))_t) = \mathrm{Ext}^p(\mathbb{Q}_t(X), (\mathrm{H}^q(F^*))_t) \Longrightarrow \mathbb{H}^{p+q}_t(X, F^*_t)$$

konvergiert wegen der Endlichkeit der $\mathbb{Q}$-kohomologischen Dimension (2.25). Der Vergleich der Limesterme für X und $X \times \mathbb{A}^1$ liefert die Behauptung. $\square$

Kapitel 4

Geometrische Motive und motivische Komplexe

4.1 Geometrische Motive

Wir definieren die Kategorie der geometrischen Motive. Im Unterschied zu der Definition von [Voe3] gehen wir jedoch nicht von glatten Korrespondenzen aus, sondern von nicht notwendigerweise glatten Schemata:

Definition 4.1. • Wir definieren die Kategorie $\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}}$ von *effektiven geometrischen Motiven* über einem Körper k (siehe Seite 65 für die Systematik der Notationen): Bezeichne $\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus}$ den Abschluß von $\mathbb{Q}\mathbf{Sch}$ unter beliebigen direkten Summen (siehe 2.22) sowie $\mathbf{K}^{-}\left(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus}\right)$ die entsprechende Homotopiekategorie von nach oben beschränkten Komplexen. Dies ist eine triangulierte Tensorkategorie [Lev, Proposition II.2.1.6.4]. Sei T die Klasse der Komplexe in $\mathbf{K}^{-}\left(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus}\right)$ der folgenden Form:

- Für alle $X \in \mathbf{Sm}$:

$$... \to 0 \to X \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{pr_1} X \to 0 \to ...,$$

  wobei X im Grad 0 sitzt.

- Für beliebige $X \in \mathbf{Sch}$, beliebige h-Überdeckungen $\mathbf{Sm} \ni U \xrightarrow{f} X$ der Komplex $\mathcal{U}_X \to X$ (siehe Definition 2.17).

• Bezeichne $\bar{T}$ die minimale lokalisierende Teilkategorie von $\mathbf{K}^{-}\left(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus}\right)$, welche T enthält. Wir definieren $\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}}$ als die pseudo-abelsche Hülle der Lokalisierung von $\mathbf{K}^{-}\left(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus}\right)$ bezüglich T:

$$\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}} := \left(\mathbf{K}^{-}\left(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus}\right)/\bar{T}\right)_{+}.$$

• Der kanonische Funktor $\mathbf{Sch} \longrightarrow \mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}}$ wird mit M_{gm} bezeichnet. $\mathrm{M}_{\mathrm{gm}}(X)$ heißt *geometrisches Motiv* von X.

Bemerkung 4.2. • Voevodsky definiert die Kategorie der geometrischen Motive als Lokalisierung der Homotopiekategorie beschränkter Komplexe von *glatten Korrespondenzen* (anstelle von beliebigen Schemata) bezüglich $\mathbb{A}^1$-Komplexen (wie hier) und Mayer-Vietoris-Sequenzen:

$$\mathbf{DM}^{\mathrm{gm,b}}_{\mathrm{eff,tr}} := \left(\mathbf{K}^{\mathrm{b}}(\mathbf{SmCor})/\{\mathbb{A}^1, \mathrm{MV}\}\right)_+$$

(Voevodskys Notation ist $\mathbf{DM}^{\mathrm{gm}}_{\mathrm{eff}}$). Die Lokalisierung der Mayer-Vietoris-Sequenzen ist in obiger Definition bereits inbegriffen, da

$$\mathrm{MV} : 0 \to U \cap V \overset{j_U \oplus j_V}{\longrightarrow} U \oplus V \overset{i_U \oplus (-i_V)}{\longrightarrow} X \to 0$$

homotop zur Zariski- (also insbesondere h-) Überdeckung $(U \sqcup V)^n_X \longrightarrow X$ ist, wie man leicht nachprüft (Entweder man konstruiert eine Homotopie oder man stellt fest, daß der entsprechende repräsentierende Prägarbenkomplex $\mathbb{Z}(\mathrm{MV})$ exakt ist und daß auch $\mathbb{Z}(\widetilde{\mathcal{U}}_X)$ mit $\widetilde{U} = U \sqcup V$ exakt ist, Lemma 2.18. Damit ist der kanonische Morphismus $\mathbb{Z}(\mathrm{MV}) \to \mathbb{Z}(\widetilde{\mathcal{U}}_X)$ ein Quasi-Isomorphismus. Folglich sind die Komplexe zueinander (ketten-)homotop, da die Terme der betreffenden Komplexe in $\mathbf{PSh}(\mathbf{SmCor})$ projektiv sind [MVW, Lemma 8.1.]).

- Es wäre reizvoll, die Kategorie als Lokalisierung $\mathbf{K}^-(\mathbb{Q}\mathbf{Sm})$ bezüglich glatter h-Hyperüberdeckungen zu definieren. Ein analoger Beweis des Einbettungssatz in diesem Fall scheitert jedoch daran, daß der Moore-Komplex einer Hyperüberdeckung auf *Prä*garben-Niveau nicht notwendigerweise exakt ist (siehe 2.19).

- Die Rolle der Invertierung der h-Überdeckungen wird noch klarer werden. Wesentlich ist, daß bzgl. der h-Topologie jedes Schema über einem Körper von Charakteristik 0 lokal glatt ist, daß jede h-Garbe Transfers besitzt und daß die h-Topologie für glatte Schemata über einem Körper der Charakteristik null subkanonisch ist, d.h.

$$\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(Y)(X) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(X), \mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(Y)) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}(X), \mathbb{Q}(Y)) = \mathbb{Q}(Y)(X)$$

für $Y \in \mathbf{Sch}$, $X \in \mathbf{Sm}$. Die mittlere Gleichheit wird für repräsentierbare Garben von Mengen (anstelle von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen) in [Voe1, Proposition 3.2.10] gezeigt. Diese Eigenschaften, sowie das Verhalten Homotopie-invarianter Garben mit Transfers werden eine Äquivalenzaussage der beiden $\mathbb{Q}$-rationalen Kategorien geometrischer Motive ergeben (siehe Theorem 5.8) – dies rechtfertigt, den gleichen Namen „geometrische Motive“ zu verwenden.

Lemma 4.3. *Die Kategorie* $\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}}$ *ist eine triangulierte Tensor-Kategorie, deren Tensorstruktur durch* $\mathrm{M_{gm}}(X) \otimes \mathrm{M_{gm}}(Y) = \mathrm{M_{gm}}(X \times Y)$ *gegeben ist.*

Beweis: Die Tensorstruktur auf $\mathbf{Sch}$ ($X \otimes Y := X \times Y$) setzt sich mittels $(\oplus X_i) \otimes (\oplus Y_j) := \oplus_{i,j} X_i \otimes Y_j$ und $K^* \otimes L^* :=$ Tot $((K^n \otimes L^m)^{n,m})$ auf $\mathbf{K}^-(\mathbf{Sch}^\oplus)$ fort (vgl. den Beweis von 4.10). Wir zeigen, daß für alle $A \in T$ und

$B \in \mathbf{K}^-(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^\oplus)$ das Tensorprodukt $A \otimes B$ in $\bar{T}$ liegt. Dann ist $\bar{T}$ eine dicke Tensor-Unterkategorie im Sinne von [Lev, II.2.3.4], woraus die Fortsetzbarkeit der Tensorstruktur von $\mathbf{K}^-(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^\oplus)$ folgt *loc. cit.*

Die Teilkategorie $\mathcal{B} \subset \mathbf{K}^-(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^\oplus)$, welche Komplexe B mit $A \otimes B \in \bar{T}$ enthält, ist offenbar eine lokalisierende Teilkategorie. Daher reicht es für $B \in \mathcal{B}$ zu zeigen, daß die einzelnen Terme von B in $\mathcal{B}$ liegen (Lemma 2.30), d.h. wir können annehmen, daß B ein im Grad 0 konzentrierter Komplex ist. Dann ist die Behauptung klar, denn $\mathbb{A}^1$-Komplexe und h-Hyperüberdeckungen $\mathcal{U}_X \to X$ sind unter Basiswechsel stabil.

Die Fortsetzung der triangulierten Tensorstruktur auf die pseudo-abelsche Hülle $\mathbf{DM}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{gm},-}$ folgt aus [Lev, Lemma II.II.2.4.4.2] (Tensorstruktur) und [BS, Theorem 1.5.] (triangulierte Struktur). $\square$

4.2 Motivische Komplexe

Voevodsky definiert in [Voe3, Seite 205, nach Proposition 3.1.13] eine Kategorie motivischer Komplexe via Nisnevich-Garben mit Transfers (siehe Definition 5.3). Wir werden die dortige Definition abändern, indem wir anstelle Nisnevich-Garben mit Transfers h-Garben ohne Transfers nehmen. Im $\mathbb{Q}$-rationalen Fall werden wir zeigen, daß die beiden Kategorien äquivalent sind (Theorem 5.6).

Definition 4.4.
- Für einen Komplex von h-Garben K^* bezeichnen wir mit $\tilde{\mathrm{H}}^n(K^*)$ die n-te Kohomologieprägarbe

  $$\tilde{\mathrm{H}}^n(K^*) : X \mapsto \mathrm{Ker}(K^n(X) \to K^{n+1}(X))/\mathrm{Im}(K^{n-1}(X) \to K^n(X)).$$

  Deren h-Garbifizierung wird als n-te Kohomologiegarbe $\tilde{\mathrm{H}}^n_{\mathrm{h}}(K^*)$ bezeichnet. (Die Notation $\tilde{\mathrm{H}}$ dient zur Vermeidung von Verwechslungen mit der Garbenkohomologie).

- $\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}))$ bezeichne die abgeleitete Kategorie von h-Garben (nach oben beschränkter Komplexe). $\mathbf{DM}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff},-} \subset \mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}))$ bezeichne die volle Teilkategorie, deren Objekte Homotopie-invariante Kohomologiegarben haben, diese Kategorie wird als Kategorie der *effektiven motivischen Komplexe* bezeichnet. Wir schreiben $\mathbf{DM}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff},-}(\mathbb{Q})$ für die entsprechende Teilkategorie von $\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}, \mathbb{Q}))$.

Bemerkung 4.5.
- Falls k perfekt ist, ist die Transferstruktur auf einer homotopie-invarianten Prätheorie von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen, die zusätzlich eine Zariski-Garbe ist, eindeutig definiert (siehe [Voe2, Proposition 5.30]). Eine analoge Aussage ließe sich für Zariski-Garben mit Transfers (im Sinne von Korrespondenzen) beweisen.
- Nach 3.5 besitzt jede h-Garbe Transfers.

Definition 4.6. Sei Δ^* das kosimpliziale Objekt in $\mathbf{Sch}$, d.h.

$$\Delta^n = \mathbb{A}^{n+1} \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \right),$$

die Randhomomorphismen sind gegeben durch $\delta_j : \Delta^n \longrightarrow \Delta^{n+1}$, $(x_i) \mapsto (x_0, ..., x_{j-1}, 0, x_{j+1}, ..., x_n)$, $0 \leq j \leq n$. Δ^n ist nicht-kanonisch isomorph zu $\mathbb{A}^n$, insbesondere glatt.

Für eine Prägarbe F bezeichne $C_*(F)$ den Komplex $F(\Delta^* \times -)$, d.h. $C_n(F)(X) = F(X \times \mathbb{A}^n)$. Mittels der Dold-Kan-Konstruktion erhält man einen Komplex von Prägarben $C_*(F)$ (die Randhomomorphismen in diesem Komplex sind durch alternierende Summen der δ_j gegeben) und damit einen exakten Funktor $C_* : \mathbf{PSh}(\mathbf{Sch}) \longrightarrow \mathbf{Kom}(\mathbf{PSh}(\mathbf{Sch}))$. Für eine Garbe bzgl. einer beliebigen Prätopologie ist auch $C_*(F)$ ein Garbenkomplex, dies folgt direkt aus der Garbendefinition sowie der Tatsache

$$(U \times_X U) \times \mathbb{A}^n \cong (U \times \mathbb{A}^n) \times_{X \times \mathbb{A}^n} \times (U \times \mathbb{A}^n).$$

Der folgende Satz liefert eine handhabbarere Beschreibung der Kategorie der effektiven motivischen Komplexe. Er ist bereits nötig, um die Tensorstruktur auf $\mathbf{DM}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff},-}$ zu definieren und wird beim Beweis des Einbettungssatzes eine wesentliche Rolle spielen.

Definition 4.7. Bezeichne $\mathcal{D} := \mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}, \mathbb{Q}))$ und $\mathcal{A}$ die lokalisierende Teilkategorie von $\mathcal{D}$, welche durch Komplexe der Form $\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(X \times \mathbb{A}^1) \xrightarrow{\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(pr_1)} \mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(X)$, $X \in \mathbf{Sm}$ erzeugt wird.

Morphismen in $\mathcal{A}$ heißen *schwache* $\mathbb{A}^1$-*Äquivalenzen*. Objekte $L \in \mathcal{D}$ heißen $\mathbb{A}^1$-*lokal*, falls für alle schwachen $\mathbb{A}^1$-Äquivalenzen $K \longrightarrow K'$ die induzierte Abbildung $\mathrm{Hom}(K', L) \longrightarrow \mathrm{Hom}(K, L)$ ein Isomorphismus ist.

Bemerkung 4.8. Aus Theorem 3.21 folgt, daß $\mathbf{DM}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff},-}(\mathbb{Q})$ eine triangulierte Unterkategorie von $\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}, \mathbb{Q}))$ ist: Für ein ausgezeichnetes Dreieck

$$A \to B \to C \to A[1]$$

in $\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}))$ mit A, $B \in \mathbf{DM}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff},-}$ ist $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^-}(\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(-), A[n]) = \mathbb{H}_{\mathrm{h}}^n(-, A)$ Homotopie-invariant, ebenso für B. Dies und die lange exakte $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^-}$-Sequenz, die aus dem Dreieck entsteht, ergibt die gleiche Eigenschaft auch für C. Daraus folgt, daß C ebenfalls $\mathbb{A}^1$-lokal (Definition 4.7) ist, vgl. [MVW, Lemma 9.17.]. Dies impliziert, daß auch C Homotopie-invariante Kohomologie-Garben hat (letzteres zeigt man unter Verwendung von 3.21 analog zu [MVW, Proposition 14.5]). Ebenso wie in *loc. cit.* überzeugt man sich davon, daß nach oben beschränkte Komplexe mit Homotopie-invarianten Kohomologie-Garben im $\mathbb{Q}$-rationalen Fall $\mathbb{A}^1$-lokal sind.

Satz 4.9. *Mit diesen Bezeichnungen existiert die Lokalisierung $\mathcal{D}/\mathcal{A}$ (d.h. die* Hom-*Klassen sind Mengen), und es besteht eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathcal{D}/\mathcal{A} \cong \mathbf{DM}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff},-}(\mathbb{Q}),$$

welche durch einen triangulierten Funktor

$$\mathbf{R}C : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{DM}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff},-}(\mathbb{Q})$$

induziert wird, der auf $\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch})$ *durch C_* gegeben ist.*

Beweis: vgl. [Voe3, Proposition 3.2.3], [MVW, Theorem 14.10] Der Kürze halber lassen wir die Einschränkung auf $\mathbb{Q}$-Vektorraumgarben in den Notationen weg. Wir zeigen, daß die Einschränkung der Projektionsabbildung

$$\Phi : \mathbf{DM}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff},-} \subset \mathcal{D} \xrightarrow{\mathrm{Proj.}} \mathcal{D}/\mathcal{A}$$

eine Äquivalenz von Kategorien ist und daß die Einschränkung der inversen Äquivalenz Φ^{-1} auf Garben gerade C_* ist:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}) \arrow[r] \arrow[dr, "C_*"'] & \mathcal{D}/\mathcal{A} \arrow[d, "\Phi^{-1}"] \\
 & \mathbf{DM}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff},-}
\end{tikzcd}$$

Setze dann $\mathbf{R}C := \Phi^{-1} \circ \mathrm{Proj}.$

A priori hat $\mathcal{D}/\mathcal{A}$ keine kleinen Hom-Klassen. Wir verweisen auf [Nee, Theorem 2.1.8] für eine sehr sorgfältige Konstruktion der Lokalisierung triangulierter Kategorien. Wir zeigen zunächst, daß Φ ein volltreuer Funktor ist. Anschließend zeigen wir die essentielle Surjektivität. Daraus folgt dann, daß die Hom-Klassen von $\mathcal{D}/\mathcal{A}$ Mengen sind. Beide Teile des Beweises fußen auf den Kohomologievergleichsresultaten für Homotopie-invariante Garben mit Transfers.

- Zur Volltreue von Φ: Sei $T \in \mathbf{DM}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff},-}$ beliebig. Dann gilt nach Definition für alle $X \in \mathbf{Sch}$, $n \in \mathbb{Z}$

  $$\tilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{h}}^{n}(T)(X) = \tilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{h}}^{n}(T)(X \times \mathbb{A}^1).$$

  $T|_{\mathbf{Sm}}$ ist nach 3.5 und 3.6 ein Komplex von Garben mit Transfers, daraus folgt unter Benutzung der Hyperkohomologie-Spektralsequenz und der Endlichkeit der $\mathbb{Q}$-kohomologischen Dimension für alle $X \in \mathbf{Sm}, n \in \mathbb{Z}$

  $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(X), T[n]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(X \times \mathbb{A}^1), T[n]),$$

  da sich die Hom-Mengen als Hyperkohomologien interpretieren lassen (2.26; 3.21).

  Daraus folgt ([MVW, Lemma 9.17] mit Transfers, ohne Transfers absolut analog), daß T ein $\mathbb{A}^1$-lokales Objekt in $\mathcal{D}$ ist (*nota bene:* $\mathcal{A}$ enthält nur $\mathbb{A}^1$-Komplexe, die aus *glatten* Schemata entstehen). Damit gilt für alle $S \in \mathcal{D}$:

  $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{A}}(S, T) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(S, T)$$

  (siehe [MVW, Lemma 9.20] für étale Garben mit Transfers, dort wird $\mathcal{D}/\mathcal{A}$ als $\mathbf{DM}_{\text{ét}}^{\mathrm{eff}}$ bezeichnet, oder [Nee, Lemma 9.1.5] für die gleiche Aussage im allgemeinen Fall). Demnach ist $\Phi : \mathbf{DM}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff},-} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{A}$ ein volltreuer Funktor.

- Zur essentiellen Surjektivität von Φ: es gilt $K \cong \mathrm{Tot}\,(C_*K)$ in $\mathcal{D}/\mathcal{A}$ (siehe [MVW, Lemma 9.14], der Beweis ohne Transfers ist absolut analog, da die Homotopie, welche den Quasi-Isomorphismus liefert, durch die Multiplikationsabbildung $\mu : \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^1$ definiert wird). Nach Lemma 3.5 und 3.6 sind K und $\mathrm{Tot}\,(C_*(K))$ als Komplexe von h-Garben Komplexe von Prägarben mit Transfers (von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen). Die Kohomologieprägarben von $\mathrm{Tot}\,(C_*(K))$ sind Homotopie-invariant [MVW, Lemma 2.17]. Nach 3.21 sind also auch die assoziierten h-Garben der Kohomologieprägarben eingeschränkt auf **Sm** Homotopie-invariant. Da es sich um h-Garben handelt, gilt dasselbe ohne die Einschränkung auf **Sm** ($G : X \mapsto \tilde{\mathrm{H}}^n_{\mathrm{h}}(K)(X \times \mathbb{A}^1)$ ist ebenfalls eine h-Garbe, $G|_{\mathbf{Sm}} = \tilde{\mathrm{H}}^n_{\mathrm{h}}(K)|_{\mathbf{Sm}}$, verwende dann Lemma 2.10). Also liegt $\mathrm{Tot}\,(C_*(K))$ in $\mathbf{DM}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff},-}$, was zu zeigen war.

nota bene: Wollte man Φ^{-1} explizit als $K \mapsto \mathrm{Tot}\,(C_*K)$ angeben, stößt man auf die Frage, ob C_* auf $\mathcal{D}$ wohldefiniert ist, d.h. die Exaktheit des Funktors. Der Funktor ist auf Prägarben-Niveau offensichtlich exakt, daher reicht es, die Rechts-Exaktheit des Funktors auf Garben-Niveau zu zeigen. Für eine Surjektion von h-Garben $f : F \to G$ bezeichne H den Prägarben-Kokern von f, es gilt $H_{\mathrm{h}} = 0$. Es handelt sich um Prägarben mit Transfers, f ist ein Morphismus von Prägarben mit Transfers (3.6), damit hat H Transfers. Unter Verwendung des Kohomologie-Vergleichssatzes für die h-Topologie (Theorem 3.21) anstelle der Nisnevich-Variante ergibt sich nun aus [MVW, Theorem 13.11.], daß die h-Garbifizierung von $C_*(H)$ exakt ist. D.h. der Funktor ist „fast“ exakt. Die h-Variante von [MVW, Corollary 13.13.] zeigt dann, daß C_* sich auf $\mathcal{D}$ fortsetzen läßt.

- Die Tatsache, daß es sich um einen triangulierten Funktor handelt, folgt aus Bemerkung 4.5 sowie dem Fakt, daß die Lokalisierung $\mathcal{D} \to \mathcal{D}/\mathcal{A}$ ein triangulierter Funktor ist [Nee, Theorem 2.1.8.].

□

Lemma 4.10. *Die Kategorien* $\mathcal{D}' = \mathbf{D}^-(\mathbf{PSh}(\mathbf{Sch}))$, $\mathcal{D} = \mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}))$ *und* $\mathbf{DM}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff},-}(\mathbb{Q})$ *tragen die Struktur einer tensor-triangulierten Kategorie.*

Beweis: Für die Definition einer triangulierten Tensorkategorie siehe [Lev, Example II.I.1.3.6.] und [MVW, Appendix 8A]. Wir konstruieren die Tensorstruktur auf $\mathcal{D}$ schrittweise:

- $\otimes$ auf **Sch**: $X \otimes Y := X \times_k Y$. $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X_1, Y_1) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X_2, Y_2)$ ist definiert durch $f_1 \otimes f_2 := f_1 \times f_2$. Man prüft leicht nach, daß dies eine Tensorkategorie definiert.

- $\otimes$ auf **PSh**(**Sch**): *nota bene:* Die „naive“ Definition $(F \otimes G)(X) := F(X) \otimes G(X)$ ist nicht möglich, da dann $F \otimes G$ keine additive Prägarbe wäre. Wir definieren die Tensorstruktur daher wie folgt:

  Jede Prägarbe mit Transfers besitzt eine Auflösung durch Summen darstellbarer Objekte, denn für jede Prägarbe F hat man eine Surjektion

$$\bigoplus_{X \in \mathbf{Sch},\ a \in F(X)} \mathbb{Z}(X) \longrightarrow F.$$

Die Prägarben $\mathbb{Z}(X)$ sind nach Definition darstellbar und daher projektiv. Seien nun zwei Prägarben F, G mit Transfers gegeben. Wir definieren zunächst $F \otimes^L G := \mathrm{Tot}\,(P_* \otimes Q_*)$, wobei P_* und Q_* zwei solche projektive Auflösungen sind und $\mathbb{Z}(X) \otimes \mathbb{Z}(Y) := \mathbb{Z}(X \times Y)$. $F \otimes^L G$ ist bis auf Homotopie eindeutig definiert, wir definieren $F \otimes G := \mathrm{H}_0(F \otimes^L G)$, dies ist unabhängig von der Wahl der projektiven Auflösungen P_* und Q_*.

- $\otimes$ auf $\mathbf{Kom}^-(\mathbf{PSh}(\mathbf{Sch}))$: Jedes Objekt in $\mathbf{Kom}^-(\mathbf{PSh}(\mathbf{Sch}))$ ist quasiisomorph zu seiner projektiven Auflösung [Wei, Exercise 5.7.1.], d.h. man kann wie oben $\otimes^L$ definieren. Je zwei solcher Auflösungen sind homotop zueinander [Wei, Exercise 5.7.3.2], damit ist auch der Totalkomplex, also $\otimes^L$ bis auf Homotopie eindeutig definiert. $\otimes$ auf $\mathbf{PSh}(\mathbf{Sch})$ setzt sich in kanonischer Weise auf $\mathbf{Kom}^-(\mathbf{PSh}(\mathbf{Sch}))$ fort, indem man den Totalkomplex des Doppelkomplexes nimmt, der entsteht, wenn man die Komplexe gliedweise miteinander tensoriert: $(F_* \otimes G_*)_n := \oplus_{i+j=n}(F_i \otimes G_j)$.

- $\otimes$ auf $\mathcal{D}' := \mathbf{D}^-(\mathbf{PSh}(\mathbf{Sch}))$: $\mathbf{PSh}(\mathbf{Sch})$ ist abelsch [Wei, Lemma 1.6.4], und hat genügend projektive Objekte, s.o. Für jede abelsche Kategorie $\mathcal{A}$, die genügend projektive Objekte hat, verfügt man über eine Äquivalenz von Kategorien $\mathbf{D}^-(\mathcal{A}) \cong \mathbf{K}^-(\mathcal{P})$, wobei $\mathcal{P}$ die volle Teilkategorie projektiver Objekte ist [Wei, Theorem 10.4.8]. Hier kann man wegen der speziellen Gestalt der projektiven Auflösungen (s. o.) sogar $\mathcal{P} = \{\oplus_{i \in I}\mathbb{Z}(X_i)\}$ wählen. Damit ist die Einschränkung von $\otimes^L$ auf $\mathcal{P}$ wohldefiniert, denn $\mathbb{Z}(X) \otimes^L \mathbb{Z}(Y) = \mathbb{Z}(X \times Y)$. Da $\otimes^L$ auf $\mathbf{Kom}^-(\mathbf{PSh}(\mathbf{Sch}))$ bis auf Homotopie eindeutig definiert ist, ist das Tensorprodukt in der Homotopiekategorie $\mathbf{K}^-(\mathcal{P})$ wohldefiniert.

  Die Einschränkung von $\otimes^L$ auf $\mathbf{K}^-(\mathcal{P})$ definiert also eine Tensorstruktur, welche mit den Shift-Funktoren verträglich ist [Lev, Proposition II.II.2.1.6.4], d.h. es handelt sich um eine triangulierte Tensorkategorie.

- $\otimes$ auf $\mathcal{D} = \mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}))$: Dies ist in [MVW, Corollary 8.17.] für étale Garben mit Transfers bewiesen. Man zeigt, daß für jeden Morphismus $f : C \longrightarrow C'$ in $\mathcal{D}'$, dessen induzierter Morphismus von assoziierten Garben ein Quasi-Isomorphismus ist, auch $f \otimes \mathrm{Id}_D$ für alle $D \in \mathcal{D}'$ diese Eigenschaft hat. Der dortige Beweis ist für h-Garben (ohne Transfers) gültig (verwende im dortigen Beweis in [MVW, Example 8.14.] anstelle von [MVW, Proposition 6.12.] die trivialerweise gültige Variante ohne Transfers). *nota bene:* Die Definition des Tensorprodukts auf $\mathcal{D}$ stimmt mit der üblichen Definition, welche auf Garbenniveau durch $F \otimes G = (V \mapsto F(V) \otimes G(V))_{\mathrm{h}}$ induziert wird, überein.

- $\otimes$ auf $\mathbf{DM}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff},-}(\mathbb{Q})$: Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ die minimale lokalisierende Teilkategorie, die alle Komplexe $\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(X \times \mathbb{A}^1) \longrightarrow \mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(X)$ mit glattem X enthält. Wir definieren eine triangulierte Tensorstruktur auf $\mathcal{D}/\mathcal{A}$, und benutzen dann die Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{D}(\mathbb{Q})/\mathcal{A} \cong \mathbf{DM}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff},-}(\mathbb{Q})$, welche in 4.9 bewiesen wurde. Die Existenz einer triangulierten Tensorstruktur auf $\mathcal{D}/\mathcal{A}$ ist eine formale Konsequenz der Tensorstruktur auf $\mathcal{D}$. Man zeigt, daß für jeden Morphismus f in $\mathcal{D}$, dessen Kegel in $\mathcal{A}$ liegt, der Kegel von $f \otimes \mathrm{Id}_D$ für jedes $D \in \mathcal{D}$

ebenfalls in $\mathcal{A}$ liegt, siehe [MVW, Corollary 9.4.] für $\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\text{ét}}(\mathbf{SmCor}))$. Dort bezeichnet $\mathbf{DM}^{\text{eff},-}_{\text{ét}}$ unser $\mathcal{D}_{\text{ét}}/\mathcal{A}$. Der Beweis läßt sich auf beliebige Garben ohne Transfers übertragen.

$\square$

4.3 Einbettung von geometrischen Motiven in motivische Komplexe

Theorem 4.11. *(Einbettungssatz)*
Sei k ein Körper, der die starke Auflösung der Singularitäten gestattet. Es gibt ein kommutatives Diagramm von tensor-triangulierten Funktoren:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{K}^-\left(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus}\right) \arrow[r, "\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}"] \arrow[d] & \mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}, \mathbb{Q})) \arrow[d, "\mathbf{R}C"] \\
\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}} \arrow[r, "i"] & \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{h}}(\mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

wobei der Funktor i eine volle Einbettung der geometrischen effektiven Motive (4.1) in die Kategorie der effektiven motivischen Komplexe (4.4) ist.

Bemerkung 4.12. • In [Voe3] wird ein analoges Resultat für Motive bewiesen, welche über glatte Korrespondenzen und mit Hilfe der Nisnevich-Topologie definiert sind. Bei dem Versuch, diese Resultate unmittelbar auf die h-Topologie zu übertragen, treten zwei Schwierigkeiten auf:

1. Zunächst muß die Bedeutung von h-Garben auf glatten Schemata geklärt sein. Dies ist möglich, indem man eine erweiterte Garbendefinition verwendet (Definition 2.4).
2. Ferner tritt folgendes Problem auf: bezeichne t die Topologie auf **Sm**, die durch die h-Topologie auf **Sch** induziert ist. Wir bezeichnen die Kategorie der t-Garben auf **Sm** mit Transfers als Kagetorie der h-Garben mit Transfers, Notation: $\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{SmCor})$. (Äquivalent dazu ist die Kategorie der h-Garben auf **Sch**, deren Einschränkung auf **Sm** Transfers haben, 2.10). Dann ist diese Kategorie möglicherweise nicht abelsch. Daher kann $\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{SmCor}))$ nicht definiert werden. Um zu zeigen, daß die Kategorie abelsch ist, bräuchte man ein h-Analogon des Garbifizierungslemmas [MVW, Corollary 6.18.]. Im Beweis von *loc. cit.* werden spezfische Eigenschaften henselscher Ringe wesentlich verwendet.

Alle anderen Beweisschritte (bis auf den Kohomologievergleichssatz) lassen sich völlig analog zu den Beweisen in [Voe3] durchführen.

• Der Grund für die Einschränkung des Satzes auf $\mathbb{Q}$-Vektorraumgarben ist, daß der Vergleichssatz zwischen Nis- und qfh-Garben nur für $\mathbb{Q}$-Vektorraumgarben gültig ist. Wesentlich ist auch die Endlichkeit der kohomologischen Dimension, die für die h-Topologie nur im Falle von Garben mit rationalen Koeffizienten gilt. Die Richtigkeit des analogen Resultats für Torsionsgarben ist nicht zu erwarten, da der Kohomologievergleichssatz in diesem Kontext vermutlich nicht gültig ist, vgl. [Voe2, Remark 5.8].

Beweis: (vgl. [Voe3, Theorem 3.2.6])
Wir lassen $\mathbb{Q}$ in der Notation weg.

- $\mathcal{D} = \mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_\mathrm{h}(\mathbf{Sch}))$ ist pseudo-abelsch nach [Lev, Example II.II.2.4.9.(iv)] und $\mathcal{A}$ ist als lokalisierende Teilkategorie abgeschlossen unter beliebigen (existierenden) direkten Summen, damit ist $\mathbf{DM}_\mathrm{h}^{\mathrm{eff},-} \overset{4.9}{\cong} \mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_\mathrm{h}(\mathbf{Sch}))/\mathcal{A}$ auch pseudo-abelsch [Lev, Example II.II.2.4.9.(ii)]. Daher reicht es nach Konstruktion und Universalitätseigenschaft der pseudo-abelschen Hülle, die Existenz einer vollen Einbettung $i : \mathcal{K} := \mathbf{K}^-\left(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^\oplus\right)/\bar{T} \longrightarrow \mathbf{DM}_\mathrm{h}^{\mathrm{eff},-}$ zu beweisen, denn wegen 2.39 gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{gm},-}}((X,p),(Y,q)) &= q \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X,Y) \circ p \\
&= q \circ \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}_\mathrm{h}^{\mathrm{eff},-}}(X,Y) \circ p \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}_\mathrm{h}^{\mathrm{eff},-}}((X,p),(Y,q)).
\end{aligned}$$

  Hierbei ist $\bar{T}$ die lokalisierende Teilkategorie von $\mathbf{K}^-\left(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^\oplus\right)$, welche von den folgenden Komplexen erzeugt wird (siehe Definition 4.1):

  - $T_{\mathbb{A}^1} = \{X \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow X, X \in \mathbf{Sm}\}$
  - $T_\mathrm{h} = \{$Moore-Komplexe von Čech-Nerven von h-Überdeckungen$\}$.

- Zur Existenz von i: Es ist aus der Definition des Funktors $\mathbf{R}C$ klar, daß $\mathbf{R}C$ mit direkten Summen vertauscht. Wir beweisen nun, daß $\mathbf{R}C(\mathbb{Q}_\mathrm{h}(T_{\mathbb{A}^1})) = 0$ und $\mathbf{R}C(\mathbb{Q}_\mathrm{h}(T_\mathrm{h})) = 0$, woraus die Existenz von i folgt. Die erste Aussage folgt aus der Konstruktion von $\mathbf{R}C$ als Hintereinanderausführung der Projektion und dem Inversen der Äquivalenz Φ (siehe 4.9, $\mathcal{A} = \mathbb{Q}_\mathrm{h}(T_{\mathbb{A}^1})$)

$$\mathbf{R}C : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{A} \xrightarrow{\Phi^{-1}} \mathbf{DM}_\mathrm{h}^{\mathrm{eff},-}.$$

  Zur zweiten Aussage: Es gilt $\mathbf{R}C(\mathbb{Q}_\mathrm{h}(Y)) = C_*(\mathbb{Q}_\mathrm{h}(Y)) =: C_*(Y)$. Die inverse Äquivalenz Φ^{-1} ordnet einem Komplex K von Garben den Totalkomplex $\mathrm{Tot}\, C_*(K)$ zu, d.h. wir haben zu zeigen, daß der Totalkomplex des Bikomplexes

$$C_*(\mathcal{U}_X \to X \to 0) : ... \longrightarrow C_*(U \times_X U) \longrightarrow C_*(U) \longrightarrow C_*(X) \longrightarrow 0$$

  für jede h-Überdeckung $U \to X$ für $X \in \mathbf{Sch}$ exakt ist (dann ist er quasiisomorph zum Nullkomplex, d.h. kanonisch isomorph zum Nullkomplex in der abgeleiteten Kategorie). $C_*(\mathcal{U}_X \to X \to 0)$ ist exakt wegen der Exaktheit von C_* und 2.18. Die Exaktheit des Totalkomplexes folgt aus der Exaktheit aller Einzelkomplexe, denn Tot bewahrt Quasi-Isomorphismen. Begründung: Tot ist ein exakter Funktor, denn $\oplus$ ist exakt: als Kolimes ist

$\oplus$ rechtsexakt [Eis, Abschnitt A6.1, Seite 709], und linksexakt, da die direkte Summe in der Prägarbenkategorie mit der direkten Summe in der Garbenkategorie übereinstimmt. Also erhält Tot Quasi-Isomorphismen [Wei, Corollary 1.5.4].

- Zur Volltreue von i: Bezeichne $\mathcal{D} := \mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}))$, $\mathcal{D}' := \mathbf{D}^-(\mathbf{PSh}(\mathbf{Sch}))$. $\mathcal{D}$ ist die Lokalisierung von $\mathcal{D}'$ an der lokalisierenden Teilkategorie, welche von h-Überdeckungen erzeugt wird (Satz 2.37).

  Betrachte das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{K}^-\left(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus}\right) \arrow[r, "\mathbb{Q}(-)"] \arrow[dr, "\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(-)"] \arrow[dd] & \mathcal{D}' \arrow[d] \\
 & \mathcal{D} \overset{2.37}{\cong} \mathcal{D}'/\mathbb{Q}(T_{\mathrm{h}}) \arrow[d, "\mathbf{R}C"] \\
\mathbf{K}^-\left(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus}\right)/(T_{\mathbb{A}^1}, T_{\mathrm{h}}) \arrow[r] & \mathcal{D}/\mathbb{Q}(T_{\mathbb{A}^1}) \cong \mathbf{DM}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff},-}
\end{tikzcd}$$

  $\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}$ faktorisiert nach Definition über den Garbifizierungsfunktor - dieser ist zunächst von $\mathbf{PSh}(\mathbf{Sch})$ nach $\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch})$ definiert, ist aber exakt und läßt sich daher auf die abgeleiteten Kategorien fortsetzen.

$$\mathbb{Q} : \mathbf{K}^-\left(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus}\right) \longrightarrow \mathcal{D}'$$

  ist eine volle Einbettung, denn die Prägarben $\oplus_i \mathbb{Q}(X_i)$ sind direkte Summen darstellbarer Funktoren, also projektiv, verwende dann [Wei, Corollary 10.4.7].

  Die Fortsetzung der Einbettung $\mathbf{K}^-(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus}) \subset \mathcal{D}'$ auf die infrage kommenden Kategorien folgt damit aus Bemerkung 2.36. (In den dortigen Notationen ist $\mathcal{C}_{2.36} := \mathbf{K}^-(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus})$, $\mathcal{D}_{2.36} := \mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}))$, $S_{2.36} := \{T_{\mathbb{A}^1}, T_{\mathrm{h}}\}$. Die Teilkategorie $\mathbf{K}^-(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus})$ ist äquivalent zu $\mathcal{D}'$, da jedes Objekt aus $\mathcal{D}'$ isomorph zu einem Objekt aus $\mathbf{K}^-\left(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus}\right)$ ist, damit ist sie insbesondere unter direkten Summanden und Summen abgeschlossen).

- Zur Tensor-Trianguliertheit von i: Die beiden Funktoren $\mathbf{R}C$ und $\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}$ sind nach Definition der Tensorstrukturen auf den beteiligten Kategorien Tensorfunktoren. Es ist ebenfalls klar, daß $\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}$ ein triangulierter Funktor ist, sowie, daß die Kompatibilitätsbedingungen von Tensor- und triangulierter Struktur von $\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}$ berücksichtigt werden. Um zu sehen, daß $\mathbf{R}C$ tensor-trianguliert ist, reicht es zu bemerken, daß die Projektion $\mathcal{D} \to \mathcal{D}/\mathcal{A}$ ein tensor-triangulierter Funktor ist, denn der Funktor $\mathbf{DM}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff},-} \to \mathcal{D}/\mathcal{A}$ ist nach Definition der beteiligten Tensorstrukturen eine Äquivalenz tensor-triangulierter Kategorien. Die Komposition $\mathbf{R}C \circ \mathbb{Q}_{\mathrm{h}}$ ist demnach ebenfalls tensor-trianguliert.

$\square$

Kapitel 5

Reinterpretation geometrischer Motive

Dieses Kapitel faßt die Ergebnisse der vorangegangenen zusammen. Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist eine Äquivalenzaussage von verschiedenen Varianten geometrischer Motive sowie motivischer Komplexe im $\mathbb{Q}$-rationalen Fall, über einem Körper der Charakteristik null. Der Vergleich der beiden Kategorien effektiver motivischer Komplexe findet sich bei Voevodsky [Voe3, Seite 228, nach Corollary 4.11]. Interessanterweise ist der Schlüssel zum Beweis der Äquivalenz der beiden Kategorien geometrischer Motive der Einbettungssatz 4.11. Die hier bewiesene Äquivalenz vereinfacht die Beschreibung von geometrischen Motiven erheblich, da man nicht mehr mit endlichen Korrespondenzen arbeiten muß. Ferner erhält man eine natürliche Ausdehnung der Motive auf singuläre Schemata.

Wir erinnern zunächst an die von Voevodsky getroffenen Definitionen - hier nur im Kontext von $\mathbb{Q}$-rationalen Korrespondenzen, Garben usw., da nur in diesem Fall eine Äquivalenz vorliegt.

Definition 5.1. (vgl. [Voe3, Seite 190, Abschnitt 2.1.]) Wir bezeichnen die $\mathbb{Q}$-rationale Variante von **SmCor** mit $\mathbb{Q}$**SmCor**. Dies ist eine additive Kategorie. Die Kategorie der *effektiven geometrischen Motive mit Transfers* $\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff},\mathrm{tr}}$ wird definiert als pseudo-abelsche Hülle der Lokalisierung von $\mathbf{K}^-(\mathbb{Q}\mathbf{SmCor}^{\oplus})$ bezüglich der minimalen lokalisierenden Teilkategorie $\mathcal{T}$, die folgende Komplexe enthält:

- Für jedes $X \in \mathbf{Sm}$ den Komplex $X \times \mathbb{A}^1 \to X$.
- Für jedes $X \in \mathbf{Sm}$, jede offene Überdeckung $X = U \cup V$ den Komplex

  $$U \cap V \stackrel{j_U \oplus j_V}{\longrightarrow} U \oplus V \stackrel{i_U \oplus (-i_V)}{\longrightarrow} X,$$

  wobei die Morphismen die natürlichen Inklusionen sind.

Dann definieren wir

$$\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff,tr}} := (\mathbf{K}^-(\mathbb{Q}\mathbf{SmCor}^{\oplus})/\mathcal{T})_+.$$

Bemerkung 5.2. In [Voe3] wird von *beschränkten* Komplexen ausgegangen und dann an der minimalen *dicken* Teilkategorie, die obige Komplexe enthält, lokalisiert. Die Modifizierung zu nach oben beschränkten Komplexen ergibt sich aus der Notwendigkeit, h-Überdeckungen zu invertieren. Im Gegensatz zum Nisnevich-Fall ist nicht klar, wie man die Čech-Nerven der Überdeckungen durch endliche Komplexe ersetzen sollte.

Definition 5.3. [Voe3, Seite 205, Abschnitt 3.1.] $\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{SmCor}, \mathbb{Q}))$ bezeichne die abgeleitete Kategorie der Nisnevich-Garben von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen mit Transfers. Die volle Teilkategorie $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{Nis,tr}}(\mathbb{Q})$ der Komplexe, deren Nisnevich-Kohomologiegarben Homotopie-invariant sind, heißt Kategorie der *effektiven motivischen Komplexe mit Transfers.* [1]

Theorem 5.4. *Es existiert eine volle Einbettung*

$$\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff,tr}} \subset \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{Nis,tr}}.$$

Beweis: Der Beweis von [Voe3, Theorem 3.2.6] läßt sich auf die Konstruktion mittels $\mathbf{K}^-(...)$ übertragen. □

Die Kategorie $\mathbf{DM}_{\mathrm{h}}$ wurde von Voevodsky in [Voe1] eingeführt. Wir werden zeigen, daß auch sie äquivalent zu $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{Nis,tr}}$ ist. Diese Aussage findet sich ohne Beweis bei [Voe3, Theorem 4.1.12].

Definition 5.5.

- Bezeichne $\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}))$ die abgeleitete Kategorie von h-Garben von abelschen Gruppen auf **Sch**.
- Bezeichne I^1 den Kern des kanonischen (Epi-)Morphismus

  $$\mathbb{Z}_{\mathrm{h}}(\mathbb{A}^1) \to \mathbb{Z}_{\mathrm{h}}(\mathrm{Spec}\ k),$$

  $i_{0/1} : \mathrm{Spec}\ k \to \mathbb{A}^1$ die Punkte 0 und 1 sowie $i = \mathbb{Z}(i_0) - \mathbb{Z}(i_1) : \mathbb{Z} \to I^1$. Eine h-Garbe F heißt *strikt zusammenziehbar*, falls es einen Morphismus $\phi : F \otimes I^1 \to F$ gibt, so daß $\phi \circ (\mathrm{Id}_F \otimes i) = \mathrm{Id}_F$ gilt. Eine h-Garbe F heißt *zusammenziehbar*, falls es eine Auflösung $G^* \to F$ aus strikt zusammenziehbaren Garben gibt. Bezeichne **Contr** die minimale dicke Teilkategorie in $\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}))$, welche alle zusammenziehbaren Garben enthält.
- Die Kategorie $\mathbf{DM}_{\mathrm{h}} := \mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}))/\mathbf{Contr}$ wird als *homologische Kategorie* bezeichnet. Analog definieren wir eine Kategorie von $\mathbb{Q}$-Vektorraumgarben $\mathbf{DM}_{\mathrm{h}}(\mathbb{Q})$.

[1] In [Voe3] wird die Kategorie effektiver motivischer Komplexe von Nisnevich-Garben abelscher Gruppen über dem Grundkörper k als $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{Nis}}(k)$ bezeichnet.

Theorem 5.6. *Sei k ein Körper, der die starke Auflösung von Singularitäten gestattet. Wir verwenden die Notationen von 4.4, 5.3 und 5.5. Dann existieren natürliche Äquivalenzen von Kategorien*

$$\mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{Nis,tr}}(\mathbb{Q}) \cong \mathbf{DM}_{\mathrm{h}}(\mathbb{Q}) \cong \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{h}}(\mathbb{Q}).$$

Beweis: Der Satz ist im wesentlichen eine Folgerung aus dem Kohomologievergleichssatz zwischen Nisnevich und h-Topologie 3.21 sowie der starken Auflösung der Singularitäten. Wir führen die beiden Äquivalenzbeweise parallel und lassen „$\mathbb{Q}$" in den Notationen weg. Wir definieren in natürlicher Weise einen Funktor $\Psi : \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{Nis,tr}} \to \mathbf{DM}_{\mathrm{h}}$, der sowohl volltreu als auch essentiell surjektiv ist. Daraus folgt die Äquivalenz der Kategorien [Mac, Satz IV.4.1].

- Wir definieren einen Funktor Φ als Komposition des Vergiß-Funktors und der h-Garbifizierung im Sinne von Bemerkung 2.11:

  $$\Phi : \mathbf{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{SmCor}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{Sm}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}).$$

  Der Vergißfunktor $\mathbf{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{SmCor}) \to \mathbf{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{Sm})$ ist offensichtlich exakt, der Garbifizierungsfunktor ebenso, *loc. cit.* Damit ist Φ exakt. Wir bezeichnen die Fortsetzung auf die jeweiligen abgeleiteten Kategorien ebenfalls mit Φ. Nach Lemma 3.5 gilt $\Phi(\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(X)) \cong \mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(X)$ für alle $X \in \mathbf{Sm}$.

  nota bene: Es ist möglich, einen Funktor

  $$\mathbf{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{SmCor}) \to \mathbf{Kom}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}))$$

  anzugeben, der für die Zwecke des Beweises das gleiche leistet, indem man h-Hyperüberdeckungen verwendet [Hub1, Proposition 2.1.4.]. Man nutzt in beiden Fällen das Phänomen aus, daß eine h-Garbe auf **Sch** bereits durch ihre Einschränkung auf **Sm** bestimmt ist.

- Die Einschränkung von Φ auf $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{Nis,tr}}(\mathbb{Q}) \subset \mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{SmCor}, \mathbb{Q}))$ wird ebenfalls mit Φ bezeichnet. Im folgenden sei $\mathcal{A}$ die lokalisierende Teilkategorie von $\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{SmCor}))$, die von $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X \times \mathbb{A}^1) \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)$, $X \in \mathbf{Sm}$ erzeugt wird.

  Die Teilkategorie $\mathcal{A}$ wird unter Φ auf $0 \in \mathbf{DM}_{\mathrm{h}}$ abgebildet. Um dies zu sehen, reicht es zu zeigen, daß die Komplexe $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X \times \mathbb{A}^1) \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)$, $X \in \mathbf{Sm}$ auf 0 abgebildet werden, was äquivalent dazu ist, daß $K_X := \mathrm{Ker}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X \times \mathbb{A}^1) \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X))$ auf 0 abgebildet wird, d.h. daß $(K_X)_{\mathrm{h}}$ kontrahierbar ist. Dies gilt aber, denn offensichtlich ist $K_X = \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X) \otimes K_{\mathrm{Spec}\ k}$ und $(K_{\mathrm{Spec}\ k})_{\mathrm{h}}$ ist kontrahierbar [Voe1, Lemma 2.2.3] (in den dortigen Notationen ist $(K_{\mathrm{Spec}\ k})_{\mathrm{h}} = I^1$). Damit faktorisiert Φ über $\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{SmCor}))/\mathcal{A}$. Die Komposition der Kategorienäquivalenz $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{Nis,tr}} \cong \mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{SmCor}))/\mathcal{A}$ [Voe3, Proposition 3.2.3] mit Φ wird mit Ψ bezeichnet:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{SmCor})) \arrow[r, two heads, "\Phi"] \arrow[d, two heads] & \mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch})) \arrow[d, two heads] \\
\mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{Nis,tr}} \arrow[ur, "\subset"] \arrow[r, "\cong"] & \mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{SmCor}))/\mathcal{A} \arrow[r] & \mathbf{DM}_{\mathrm{h}}
\end{tikzcd}
$$

- Zur essentiellen Surjektivität: Die Projektion $\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch})) \to \mathbf{DM}_{\mathrm{h}}$ ist surjektiv. Der Funktor $\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{SmCor})) \to \mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}))$ ist ebenfalls surjektiv, da für jede h-Garbe F auf $\mathbf{Sch}$ $F|_{\mathbf{Sm}}$ nach 3.5 eine Prägarbe mit Transfers ist und auch die Morphismen von h-Garben durch Morphismen von Prägarben mit Transfers induziert werden (Lemma 3.6). Damit liegt jeder Komplex von h-Garben im Bild. Also ist $\Psi : \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{Nis,tr}} \to \mathbf{DM}_{\mathrm{h}}$ essentiell surjektiv.

- Zur Volltreue von Ψ: Wir schreiben $F_{\mathrm{h}} := \Phi(F)$ ($F \in \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{Nis,tr}}$). Es reicht, für jeden Komplex $F \in \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{Nis,tr}}$ die Isomorphie von

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{SmCor},\mathbb{Q}))}(\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(X), F[n]) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}_{\mathrm{h}}}(\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(X), F_{\mathrm{h}}[n])$$

zu zeigen. Die volle Teilkategorie $\mathcal{C}$ von $\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{SmCor}))$, so daß für alle $C \in \mathcal{C}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{SmCor}))}(C, F[n]) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}_{\mathrm{h}}}(C_{\mathrm{h}}, F_{\mathrm{h}}[n])$$

für alle n gilt, ist, wie man leicht sieht, eine lokalisierende Teilkategorie, vgl. Definition 2.27. $\mathcal{C}$ enthält alle $\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(X)$ und stimmt daher mit ganz $\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{SmCor},\mathbb{Q}))$ überein (2.33).

- Der Kürze halber schreiben wir im folgenden gelegentlich Spec k für $\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(\mathrm{Spec}\ k)$, X für $\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(X)$ usw. In $\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}))$ verfügen wir über ein ausgezeichnetes Dreieck

$$I^1 \to \mathbb{A}^1 \to \mathrm{Spec}\ k \to I^1[1].$$

Nach 4.10 ist $\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}))$ eine Tensor-triangulierte Kategorie, d.h. das Dreieck bleibt nach Tensorieren mit X ausgezeichnet, dessen lange exakte Hom-Sequenz lautet

$$... \leftarrow \mathrm{Hom}(X \otimes I^1, F_{\mathrm{h}}[n]) \leftarrow \mathrm{Hom}(X \otimes \mathbb{A}^1, F_{\mathrm{h}}[n]) \leftarrow \mathrm{Hom}(X, F_{\mathrm{h}}[n]) \leftarrow ....$$

Die beiden rechten Terme lassen sich als n-te Hyperkohomologien von F in X bzw. $X \times \mathbb{A}^1$ interpretieren, diese sind wie die Kohomologien von F Homotopie-invariant (3.21), es folgt $\mathrm{Hom}(X \otimes I^1, F_{\mathrm{h}}[n]) = 0$, d.h. F_{h} ist strikt Homotopie-invariant im Sinne von [Voe1, Definition 2.2.8]. Daraus folgt [Voe1, Proposition 2.2.9]

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}_{\mathrm{h}}}(X, F_{\mathrm{h}}[n]) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}})}(X, F_{\mathrm{h}}[n]) = \mathbb{H}^n_{\mathrm{h}}(X, F_{\mathrm{h}}).$$

- Die Äquivalenz mit $\mathbf{DM}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{eff},-}$ ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{Nis,tr}}}(\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(X), F[n]) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{SmCor}))}(\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(X), F[n]) \\
&\cong \mathbb{H}^n_{\mathrm{Nis}}(X, F) \\
&\overset{3.21}{\cong} \mathbb{H}^n_{\mathrm{h}}(X, F_{\mathrm{h}}) \\
&\overset{2.26}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^-(\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch}))}(\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(X), F_{\mathrm{h}}[n]) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{h}}}(\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(X), F_{\mathrm{h}}[n]),
\end{aligned}$$

der erste Isomorphismus wurde in [Voe3, Proposition 3.1.9] gezeigt. Wegen Lemma 3.5 und Lemma 3.6 ist der Funktor $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{Nis,tr}}(\mathbb{Q}) \to \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{h}}(\mathbb{Q})$ surjektiv, also eine Kategorienäquivalenz.

□

Lemma 5.7. *Sei k von Charakteristik null. Der kanonische Morphismus $\mathbb{Q}(X) \to \mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(X)$ ist ein Isomorphismus, falls die Prägarben auf* **Sm** *eingeschränkt werden.*

Beweis: Bezeichne $L(X)$ die h-Garbifizierung der Prägarbe von Mengen $S \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(S, X)$. Dann lautet die Aussage von [Voe1, Proposition 3.2.10] für ein halbnormales Schema X und beliebiges Y:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch},\mathbf{Ens})}(L(X), L(Y)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, Y).$$

Der gleiche Beweis zeigt auch

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}_{\mathrm{h}}(\mathbf{Sch},\mathbb{Q}\text{-VR})}(\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(X), \mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(Y)) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\mathbf{Sch}}(X, Y).$$

(Die Beweisidee von *loc. cit.* ist: für ein normales Schema X über einem Schema der Charakteristik null und einen universellen topologischen Homöomorphismus $p : Y \to X$ ist p bereits ein Isomorphismus. Die Kategorie der repräsentierbaren h-Garben ist die Lokalisierung von **Sch** an der Klasse der universllen topologischen Homöomorphismen [Voe1, Theorem 3.2.9]. Diese Argumentation überträgt sich auf den $\mathbb{Q}$-linearen Fall).

Die linke Seite ist gerade $\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(Y)(X)$, die rechte $\mathbb{Q}(Y)(X)$. Daraus folgt die Surjektivität der Abbildung in der Behauptung sogar für halbnormale Schemata X anstelle glatter. Die Injektivität ist [Voe1, Lemma 3.2.2] (für repräsentierbare Garben von Mengen; für Garben von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen analog). □

Theorem 5.8. *Sei k ein Körper von Charakteristik null. Dann besteht eine Äquivalenz von effektiven geometrischen Motiven (mit rationalen Koeffizienten) mit und ohne Transfers (4.1, 5.1):*

$$\kappa : \mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}}(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff,tr}}(\mathbb{Q}).$$

Beweis: Wir verfügen über folgendes kommutatives Diagramm von Kategorien ($\subset$ kennzeichnet volle Einbettungen, $\cong$ Äquivalenzen von Kategorien):

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{K}^-(\mathbb{Q}\mathbf{SmCor}^{\oplus}) \arrow[r] & \mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff},\mathrm{tr}} \arrow[dr, "\subset"] \arrow[dd, dotted, "\kappa", "\cong"'] & \\
\mathbf{K}^-(\mathbb{Q}\mathbf{Sm}^{\oplus}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{h}} \cong \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{Nis},\mathrm{tr}} \\
 & \mathbf{K}^-(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus}) \arrow[r] & \mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}} \arrow[ur, "\subset"] &
\end{tikzcd}$$

Im Beweis kann man das Bilden der pseudo-abelschen Hülle in der Konstruktion der geometrischen Motive ignorieren.

Wir fassen die volltreuen Funktoren als Inklusionen von Kategorien auf und zeigen zunächst, daß der gesuchte Funktor κ existiert, d.h. daß die Teilkategorie $\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff},\mathrm{tr}}$ in $\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}}$ liegt. Anschließend zeigen wir die essentielle Surjektivität.

- Zur Existenz von κ: Sei ein $S \in \mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff},\mathrm{tr}}$ gegeben, d.h. ein Komplex der Form
$$S : \ldots \to S_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} S_n \xrightarrow{f_n} S_{n+1} \to \ldots,$$
wobei die S_i disjunkte Vereinigungen glatter Schemata sind, die f_i Korrespondenzen. Dieser Komplex wird auf Tot $C_*(\mathbb{Q}_{\mathrm{tr},\mathrm{h}}(S)) \in \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{h}}$ abgebildet. Es reicht also, einen Komplex $S' \in \mathbf{Kom}^-(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus})$ zu finden (d.h. die Randabbildungen sollen Abbildungen von Schemata sein), so daß $\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(S') \cong \mathbb{Q}_{\mathrm{tr},\mathrm{h}}(S)$ gilt. Notwendigerweise sind die Terme der Komplexe S' und S gleich.

  Betrachte folgende Morphismen von Prägarben:
$$\mathbb{Q}(X) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(X) \xrightarrow{\beta} \mathbb{Q}_{\mathrm{tr},\mathrm{h}}(X), X \in \mathbf{Sm}.$$
α ist ein Isomorphismus, falls die Prägarben auf glatte Schemata eingeschränkt werden (5.7). β ist ein Isomorphismus nach Lemma 3.5. Insbesondere gilt $\mathbb{Q}_{\mathrm{tr},\mathrm{h}}(X)(Y) = \mathbb{Q}(X)(Y)$ für glattes Y (siehe auch Bemerkung 4.2). Also gibt es für die Elemente
$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_{\mathrm{tr},\mathrm{h}}(f_n) \quad \in \quad & \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_{\mathrm{tr},\mathrm{h}}(S_n), \mathbb{Q}_{\mathrm{tr},\mathrm{h}}(S_{n+1})) \\
& = \mathbb{Q}_{\mathrm{tr},\mathrm{h}}(S_{n+1})(S_n) \\
& = \mathbb{Q}(S_{n+1})(S_n)
\end{aligned}$$
Linearkombinationen von Morphismen von *Schemata*
$$f'_n \in \mathrm{Hom}\left(\mathbb{Q}\left(S'_n\right), \mathbb{Q}\left(S'_{n+1}\right)\right) = \mathbb{Q}(S_{n+1})(S_n),$$

die unter h-Garbifizierung auf f_n abgebildet werden. Dies bleibt gültig, wenn die Terme S_n usw. durch beliebige direkte Summen (= disjunkte Vereinigungen) $\oplus_i S_{n,i} := \oplus\mathbb{Q}(S_{n,i}) \in \mathbb{Q}\mathbf{SmCor}^{\oplus}$ ersetzt werden. Daraus folgt die Existenz des Funktors κ.

- Zur essentiellen Surjektivität: Sei also nun ein Komplex $S \in \mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}}$ gegeben, d.h. ein Komplex, dessen Einträge disjunkte Vereinigungen von nicht-notwendigerweise glatten Schemata sind und dessen Randabbildungen Linearkombinationen gewöhnlicher Morphismen von Schemata sind. S ist nach oben beschränkt, demnach gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$, so daß $S_m \in \mathbb{Q}\mathbf{Sm}^{\oplus}$ für alle $m > n$. Für den n-ten Eintrag von S wählt man eine h-Überdeckung $U \to S_n$ durch eine direkte Summe glatter Schemata U (d.h. wähle für $S_n = \oplus_j S_{n,j}$ eine glatte h-Überdeckung $U_j \to S_{n,j}$, $U := \oplus_j U_j$). Bezeichne $V_i := U^i_{S_n}$ das i-fache Produkt von U über S_n.

  Man beachte, daß die Morphismen $f_{n-1} : S_{n-1} \to S_n$ etc. Linearkombinationen von Morphismen von Schemata sind. Mit etwas mißbräuchlicher Notation definieren wir $S_{n-1} \times_{S_n} V_1$ in diesem Fall wie folgt [Hub2, Definition B.4.3]: sei $S_{n-1} = \sqcup_j S^j_{n-1}$ die Zerlegung in Zusammenhangskomponenten, sowie $f_{n-1} = \sum a^{j,i}_{n-1} \cdot f^{j,i}_{n-1}$ mit $f^{j,i}_{n-1} : S^j_{n-1} \to S_n$. Setze dann

$$S_{n-1} \times_{S_n} V_1 := \bigsqcup_j \left(\prod_i S^j_{n-1} \times_{S_n, f^{j,i}_{n-1}} V_1 \right),$$

  wobei $\prod$ das Faserprodukt über S^j_{n-1} bezeichnet. Dies ist funktoriell in V_1 [Hub2, Lemma B.4.4] und ergibt eine Hyperüberdeckung, denn Hyperüberdeckungen sind stabil unter Basiswechsel.

  Betrachten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \\
\mathcal{S} \arrow[dd, "\nu"] & \cdots \arrow[r] & S_{n-2} \times_{S_n} V_2 \arrow[r] \arrow[d] & S_{n-1} \times_{S_n} V_2 \arrow[r] \arrow[d] & V_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \cdots \arrow[r] & S_{n-2} \times_{S_n} V_1 \arrow[r] \arrow[d] & S_{n-1} \times_{S_n} V_1 \arrow[r] \arrow[d] & V_1 \arrow[r] \arrow[d] & S_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & \cdots \\
S & \cdots \arrow[r] & S_{n-2} \arrow[r, "f_{n-2}"] & S_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] & S_n \arrow[r, "f_n"] & S_{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

  Bezeichne $\mathcal{S}$ den Doppelkomplex, der aus den oberen Zeilen (bis auf die letzte, durch S gegebene) besteht. Die Aussage, daß obiges Diagramm kommutativ ist, formulieren wir als Existenz eines Morphismus (von Doppelkomplexen) $\nu : \mathcal{S} \to S$. Wenden wir auf diesen Morphismus den Funktor $\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}$ an, entsteht ein Morphismus $\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(\nu) : \mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(\mathcal{S}) \to \mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(S)$. Dieser ist wegen 2.18 ein Quasi-Isomorphismus, demnach ist der assoziierte Morphismus der Totalkomplexe ein Isomorphismus in der abgeleiteten Kategorie von h-Garben auf **Sch**: $\operatorname{Tot}\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(\mathcal{S}) \cong \operatorname{Tot}\mathbb{Q}_{\mathrm{h}}(S)$. Wegen Lemma 2.18 ist damit auch $\operatorname{Tot}\mathcal{S} \to \operatorname{Tot} S$ ein Isomorphismus in $\mathbf{K}^-(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus})/\{\text{h-Überdeckungen}\}$, also auch in $\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}}$. Wegen $V_1 \in \mathbb{Q}\mathbf{Sm}^{\oplus}$ liegen alle Terme von $\operatorname{Tot}\mathcal{S}$ mit Grad $> n-1$ in $\mathbb{Q}\mathbf{Sm}^{\oplus}$. Auf diese Weise konstruiert man induktiv einen zu S isomorphen Komplex, dessen Terme sämtlich in $\mathbb{Q}\mathbf{Sm}^{\oplus}$ liegen.

□

Bemerkung 5.9. • Man beachte, daß der Funktor κ nicht durch einen Funktor $\mathbf{K}^-(\mathbb{Q}\mathbf{SmCor}^{\oplus}) \to \mathbf{K}^-(\mathbb{Q}\mathbf{Sch}^{\oplus})$ induziert wird.

- In 5.7 wird benutzt, daß das Basisschema von Charakteristik null ist. Möglicherweise kann man sich von der Voraussetzung char $k = 0$ aber unter Verwendung von [Voe1, Proposition 3.2.11] befreien. Wir werden diese Frage jedoch hier nicht weiter verfolgen, da durch die starke Auflösung der Singularitäten ohnehin char $k = 0$ nötig ist (siehe Satz 2.2).

Ausblick 5.10. Die Äquivalenz der jeweiligen nicht-effektiven Kategorien ist eine formale Konsequenz dessen. Wir definieren *geometrischen Motive (ohne Transfers)* $\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}$ wie folgt:

Das *Tate-Objekt* $\mathbb{Q}(1)$ wird als $\widetilde{\mathrm{M}_{\mathrm{gm}}}(\mathbb{P}^1)[-2]$ definiert, wobei für ein Schema X über Spec k das reduzierte Motiv $\widetilde{\mathrm{M}_{\mathrm{gm}}}(X)$ definiert ist durch das kanonische ausgezeichnete Dreieck

$$\widetilde{\mathrm{M}_{\mathrm{gm}}}(X) \to \mathrm{M}_{\mathrm{gm}}(X) \to \mathrm{M}_{\mathrm{gm}}(\operatorname{Spec} k) \to \widetilde{\mathrm{M}_{\mathrm{gm}}}(X)[1].$$

Wir setzen $\mathbb{Q}(n) := \mathbb{Q}(1)^{\otimes n}$, $X(n) := X \otimes \mathbb{Q}(n)$, $X \in \mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}}$, $n \geq 0$ (zur Definition der Tensorstruktur auf $\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}}$ siehe Lemma 4.3).

Wir invertieren nun $\mathbb{Q}(1) \in \mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}}$ wie folgt: Objekte von $\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}$ sind Paare (X, n), $X \in \mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}}$, $n \in \mathbb{Z}$. Wir definieren die Morphismenmengen $\operatorname{Hom}_{\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}}((X', n'), (X'', n''))$ durch

$$\lim_{m \geq -n', -n''} \operatorname{Hom}_{\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}}}(X(m+n'), Y(m+n'')),$$

wobei $X(n) := X \otimes \mathbb{Q}(1)^{\otimes n}$.

Ausgehend von $\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff,tr}}$ erhalten wir völlig analog die Kategorie der *geometrischen Motive mit Transfers* $\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{tr}}$ und auch einen Funktor $\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-} \to \mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{tr}}$, den wir ebenfalls mit κ bezeichnen.

Die Äquivalenz der jeweiligen nicht-effektiven Kategorien ist nun eine formale Konsequenz von Theorem 5.8: Da Objekte beider Kategorien Paare (X, n), $X \in \mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}}$ (bzw. $X \in \mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff,tr}}$), $n \in \mathbb{Z}$ sind, ist κ ebenfalls essentiell surjektiv. Offensichtlich wird das Tate-Objekt in $\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff,tr}}$ auf das Tate-Objekt in $\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff}}$ abgebildet. Die Tensorstrukturen der beiden äquivalenten Teilkategorien stimmen überein, da die Einbettungen in $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{h}}$ jeweils tensor-triangulierte Funktoren sind. Daher ist κ eine volle Einbettung wegen der Konstruktion der

Morphismenmengen als Limites der $\mathrm{Hom}_{\mathrm{eff}}$-Mengen. Unter Verwendung des Einbettungsergebnisses $\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{eff,tr}} \subset \mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{\mathrm{tr}}$ [Voe3, Theorem 4.3.1] ließe sich ein entsprechendes Ergebnis auch für die jeweiligen Kategorien ohne Transfers erhalten.

Literaturverzeichnis

[AKML] D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki, J.L.W. Lodarczyk: *Torification and Factorization of Birational Maps*, Journal of the A.M.S., Vol. 15, Nr. 3, S. 531 – 572

[BG] K.S.Brown, S.M.Gersten: *Algebraic K-theory and generalized sheaf cohomology*, in Algebraic K-theory, I: Higher K-theories, Lecture Notes in Mathematics 341, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1973, S. 266 – 292

[Bon] L. Bonavero: *Factorisation faible des applications birationelles*, Séminaire Bourbaki, Novembre 2000, Nr. 880

[BS] P. Balmer, M. Schlichting: *Idempotent completion of triangulated categories*, Journal of Algebra 236(2) (2001), S. 819 – 834

[Del] P. Deligne: *Théorie de Hodge III*, Publications mathématiques de l'IHÉS 44 (1974), S. 5 – 77

[EGA4] A. Grothendieck: *Élements de géometrie algèbrique*, Publications mathématiques de l'IHÉS, 20, 24, 28, 32, 1964 - 1967

[Eis] D. Eisenbud: *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Springer Graduate Texts in Mathematics 150, New York, Berlin, Heidelberg, 1995

[FSV] E. Friedlander, A. Suslin, V. Voevodsky: *Cycles, transfers and motivic homology theories*, Annals of Mathematics Studies 143, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2000

[FV] E. Friedlander, V. Voevodsky: *Bivariant cycle cohomology*, in [FSV], S. 138 – 187

[Fri] E. Friedlander: *Étale homotopy of simplicial schemes*, Princeton University Press, 1982

[Ful] W. Fulton: *Introduction to intersection theory*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1984

[GJ] P. G. Goerss, J. F. Jardine: *Simplicial homotopy theory*, Progress in Mathematics 174, Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

[GL] T. G. Goodwillie, S. Lichtenbaum: *A cohomological bound for the h-topology*, American Journal of Mathematics, 123(3) (2001), S. 425 – 443

[GM] S. I. Gelfand, Y. I. Manin: *Methods of Homological Algebra*, 2. Ausgabe, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2003

[HH] C. Haesemeyer, J. Hornbostel: *Motives and etale motives with finite coefficients*, Preprint, http://www.math.uiuc.edu/K-thery/0678/

[Han] M. Hanamura: *Mixed motives and algebraic cycles*, I. Math. Res. Lett. 2(6) (1995), S. 811 – 821

[Har] R. Hartshorne: *Algebraic geometry*, Springer Graduate Texts in Mathematics 52, New York, Berlin, Heidelberg, 1977

[Hir1] H. Hironaka: *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characterstic zero*, Annals of Mathematics, 79 (1964), S. 109 – 326

[Hir2] H. Hironaka: *Flattening theorem in complex analytic geometry*, Amer. J. of Math. 97 (1975), Nr. 2, S. 503 – 547

[Hub1] A. Huber: *Realization of Voevodsky's motives*, J. Algebraic Geom. 9(4) (2000), S. 755 – 799

[Hub2] A. Huber: *Corrigendum to „Realization of Voevodsky's motives“*, J. Algebraic Geom. 13 (2004), S. 195 – 207

[Jan] U. Jannsen: *Motivic sheaves and filtrations on Chow groups* in Motives, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 55.1, AMS

[Jon] A.J. de Jong: *Smoothness, semi-stability and alterations*, Publications Mathématiques de l'IHÉS 83 (1996), S. 51 – 93

[Lev] M. Levine: *Mixed motives*, Mathematical surveys and monographs vol. 57, American Mathematical Society, 1998

[MVW] C. Mazza, V. Voevodsky, C. Weibel: *Notes on motivic cohomology*, Preprint, www.math.rutgers.edu/˜weibel/third.pdf

[Mac] S. MacLane: *Kategorien*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972

[Mil] J. Milne: *Étale cohomolgy*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1980

[Nee] A. Neeman: *Triangulated categories*, Annals of Mathematics Studies 148, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2001

[Nis] Y. A. Nisnevich: *The completely decomposed topology on schemes and associated descent spectral sequences in algebraic K-theory*, in Algebraic K-theory: connections with geometry and topology, Kluwer Acad. Publications, Dordrecht, 1989, S. 241 – 342

[Ray] M. Raynaud: *Anneaux locaux henséliens*, Lecture Notes in Mathematics 169, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1970

[RG] M. Raynaud, L. Gruson: *Critères de platitude et de projectivité. Techniques de „platification“ d'un module*, Invent. Math. 13 (1971), S. 1 – 89

[Ric] J. Rickard: *Derived categories and stable equivalence*, Journal of Pure and Applied Algebra 61, 1989, S. 303 – 317

[SGA1] A. Grothendieck: *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Mathematics 224, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

[SGA4] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier: *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Mathematics 269, 270, 305, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1972 - 1973

[SV1] A. Suslin, V. Voevodsky: *Singular homology of abstract algebraic varieties*, Inventiones Mathematicae 123(1) (1996), S. 61 – 94

[SV2] A. Suslin, V. Voevodsky: *Relative cycles and Chow sheaves*, in [FSV], S. 10 – 86

[Ser] J.-P. Serre: *Motifs*, Astérisque 198-200, S. 333 – 349

[Voe1] V. Voevodsky: *Homology of schemes I*, Selecta Mathematica, New Series 2(1) (1996), S. 111 – 153

[Voe2] V. Voevodsky: *Cohomological theory of presheaves with transfers*, in [FSV], S. 87 – 137

[Voe3] V. Voevodsky: *Triangulated categories of motives*, in [FSV], S. 199 – 254

[Wei] C. Weibel: *Introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Math. vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994

Index und Symbolverzeichnis

Die Notationen $\mathbf{DM}^*_*$ verstehen sich wie folgt: $\mathbf{DM}^{\mathrm{gm},-}_{[\mathrm{eff}],[\mathrm{tr}]}$ bezeichnet die Kategorie der [effektiven] geometrischen Motive [mit Transfers].
$\mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{[\mathrm{Topologie}],[\mathrm{tr}]}$ bezeichnet die Kategorie der effektiven motivischen Komplexe bzgl. der spezifizierten Topologie [mit Transfers]. Der Index „-“ bezieht sich jeweils auf die Bildung mittels nach oben beschränkter Komplexe.

Danksagung

Mein herzlicher Dank gilt meiner Betreuerin Frau Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter. Ich verdanke ihr die Einführung in dieses interessante Gebiet der algebraischen Geometrie und viele motivierende Impulse durch die rege Anteilnahme, mit der sie diese Arbeit begleitet hat.

Zu großem Dank bin ich den Herren Matthias Wendt und Malte Witte für die sehr sorgfältige Durchsicht des Manuskripts verpflichtet.

Nicht zuletzt möchte ich den Herren Dr. Shahram Biglari und Prof. Dr. Bernd Herzog danken, die mir in fruchtbaren Diskussionen viele neue Einsichten vermittelten.

Selbständigkeitserklärung

Ich versichere, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Leipzig, den 16. Dezember 2005 Jakob Scholbach