Übungen zur Vorlesung "Algebraische Zahlentheorie" SS 2008 Blatt 10

Ausgabe: 04.07.2008, **Abgabe:** 11.07.2008

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/azt.html
Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 10.1: Sei k ein Körper. Zeigen Sie, dass der Potenzreihenring $k[[t]]$ ein diskreter Bewertungsring ist. Beschreiben Sie den Quotientenkörper und dessen Bewertung.

(4 Punkte)

Aufgabe 10.2: Sei k ein Körper, $a \in k^*$. Bestimmen Sie die Komplettierung des Funktionenkörpers $k(t)$ bezüglich des Absolutbetrages, der zum Primideal $(t-a)$ gehört.

(4 Punkte)

Aufgabe 10.3: In der Vorlesung wurde $\mathbb{Q}_p$ definiert als Komplettierung von $\mathbb{Q}$ bezüglich des Absolutbetrages $|\cdot|_p$. Zeigen Sie, dass die Menge der Potenzreihen

$$\left\{ \sum_{i=-m}^{\infty} a_i p^i \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_i < p \right\}$$

mit $\mathbb{Q}_p$ identifiziert werden kann. Geben Sie die p-adische Reihendarstellung für -1 an.

(4 Punkte)

Aufgabe 10.4:

1. Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^2 = 2$ in $\mathbb{Z}_7$ eine Lösung hat, indem Sie induktiv zeigen, dass Lösungen in $\mathbb{Z}/(7^{n+1})$ existieren.

2. Geben Sie die ersten 3 Terme in der 7-adischen Entwicklung der beiden Lösungen an.

(4 Punkte)